基礎理論(2)
不確実性下の意思決定・保険の役割

社会保障論

No.3

麻生良文

内容

- 不確実性下の意思決定
  - 状態空間モデル
- 期待効用理論
- リスクに対する態度
  - 危険（リスク）回避的，危険中立的，危険愛好的
  - リスク・プレミアム
  - 危険回避度
- 保険の原理
- リスク分散との違い

不確実性下の意思決定

- 不確実性
  - 実現する状態が事前にはわからない

- 例）x月x日の野外コンサートのチケットを事前に購入
  - 天気がいい場合のコンサート
  - 雨の場合のコンサート
  - 寒い日の場合のコンサート
- どのような天候になるかによって，コンサートからの満足感は異なる
  - 事前のチケットの購入→ 晴れる場合，天候が悪い場合の確率を予想して購入するはず
- 状態空間モデル state space model
  - 実現する状態に応じて異なる財・サービスとしてとらえる

不確実性下の意思決定
ポートフォリオ選択の例

- 株式を購入するか，国債を購入するか
  - 起きうる状態が2つ
  - 株式の収益率は不確実（確率変数である）
    - 状態1　r_H　（好況）
    - 状態2　r_L　（不況）
    - ただし，$r_H > r_L$
  - 国債の収益率は確定
    - どちらの状態が実現しようとも r_S の収益率
- 一定の保有資産を株式と国債で運用
  - 株式と国債をどのような割合で購入するだろうか

状態空間モデル

株式だけに投資する場合の資産額
　状態1が実現 $A_h = (1 + r_H)A_0$
　状態2が実現 $A_l = (1 + r_l)A_0$

国債だけに投資する場合の資産額
　どちらの状態が実現しても $A_s = (1 + r_s)A_0$

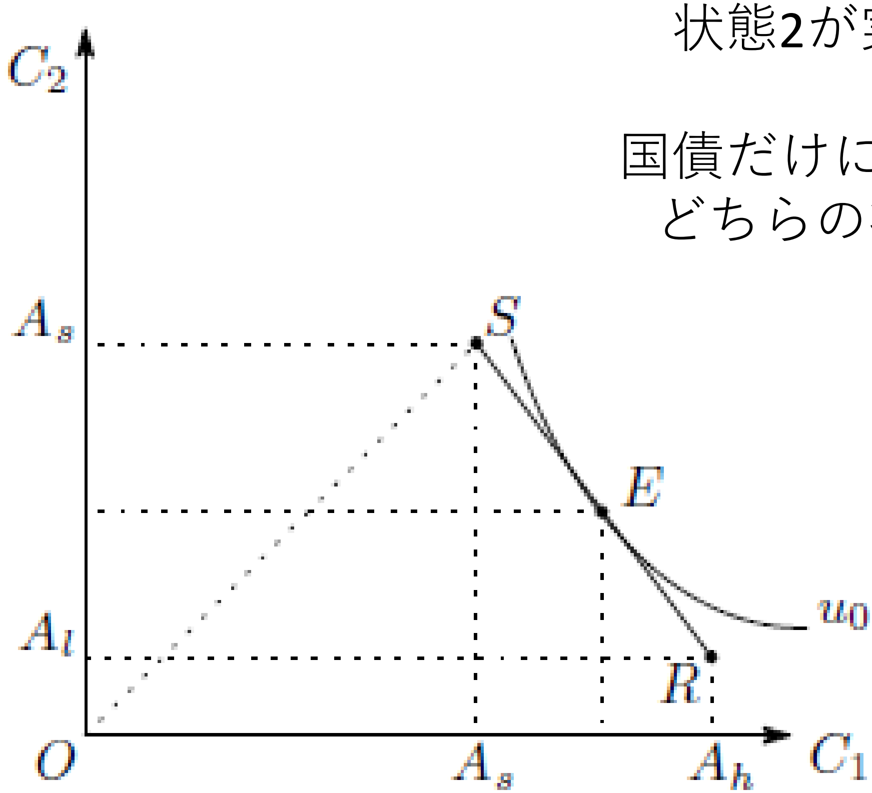


図 14.5　最適なポートフォリオ

状態1が実現する場合の資産額（消費額）をC_1，状態2が実現する場合の資産額（消費額）をC_2とし，(C_1,C_2)平面に資産額をプロットする
　株式だけ → R 点
　国債だけ → S点

両者を一定割合ずつ購入
→ 線分RS上の点

状態空間モデル(2)

- (C_1, C_2)平面上のある1点をとる
- C_1を1単位増加させる場合，何単位のC_2を犠牲にしても無差別だろうか?
- (C_1, C_2)平面上に無差別曲線が描ける
- 限界代替率はそれぞれの状態の（主観的な）実現確率に依存する
- 通常の場合（危険回避的な場合），無差別曲線は原点に対して凸

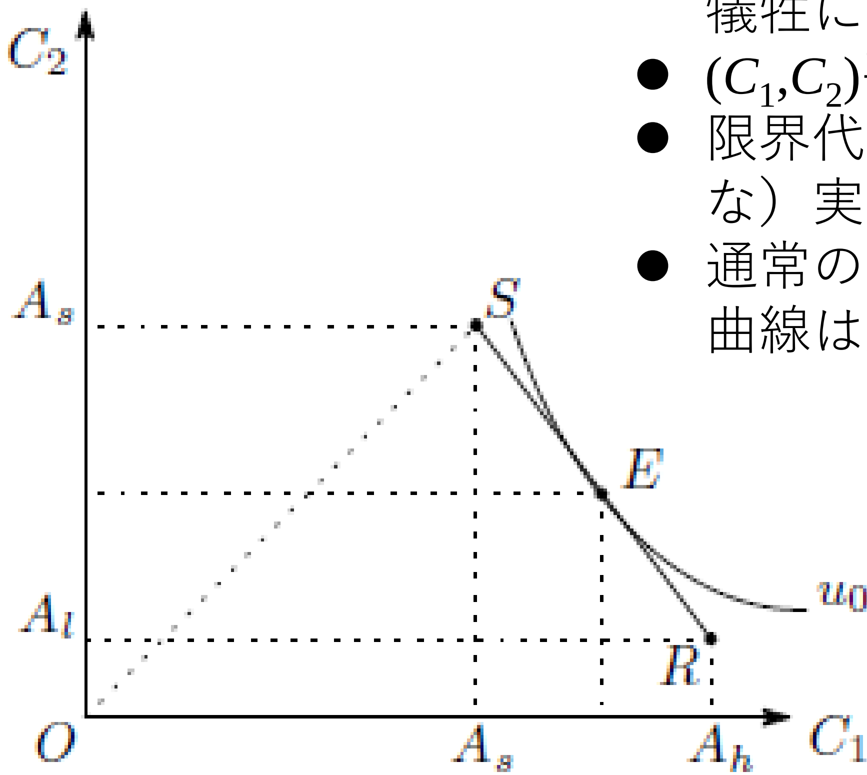


図 14.5　最適なポートフォリオ

ポートフォリオ選択の問題

→ 予算制約（線分SR）のもとでの効用最大化
→ 図ではE点がそれ

期待効用理論 expected utility theory

消費者の選好についてのもっともらしい仮定の下では，効用関数は次のような特殊な形をしている

$$\mathrm{E}u(x) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \cdots + p_n u(x_n) \tag{1}$$

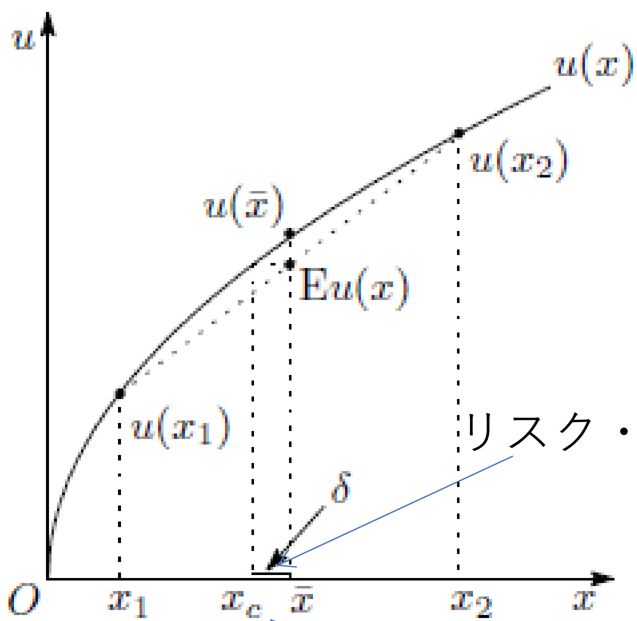
ただし，x_iは状態iが実現する場合の消費で，p_iは状態iの実現する確率を表す。したがって，p_iについては次の式が成り立たなければならない

$$0 \le p_1 \le 1, 0 \le p_2 \le 1 \cdots, 0 \le p_n \le 1$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

(1)式は，効用関数が$u(x)$の期待値で表されることを示している。

リスクに対する態度(1)

期待効用　$\mathrm{E}u(x) = p_1 u(x_1) + p_2 u(x_2) + \cdots + p_n u(x_n)$



リスク・プレミアム

確実性等価額(certainty equivalent)

図はn=2, p_1=p_2=0.5のケース

危険回避者(risk averter)
　u(x) が上に凸の場合（限界効用 u’(x) が逓減する）

$$\mathrm{E}u(x) < u(\bar{x})$$

$\bar{x}$：　xの期待値

（期待値でみて等しい結果と比較する時，不確実なものよりも確実なものが好ましいと思う）

リスクに対する態度(2)

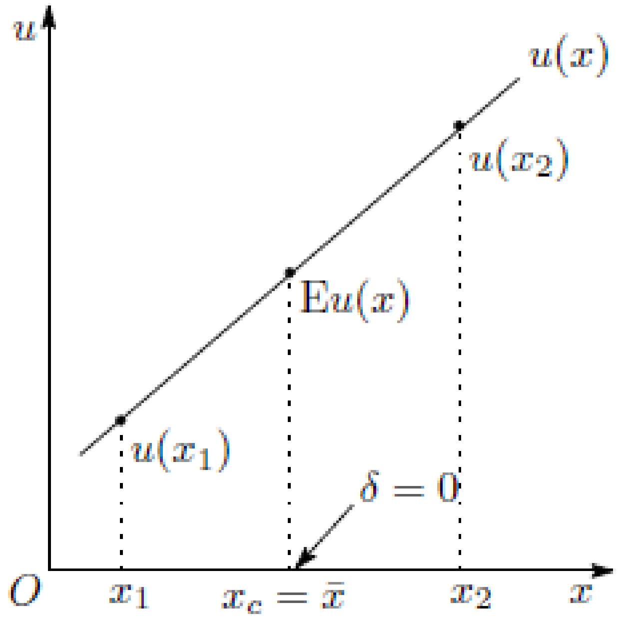


図 14.7　リスク中立的

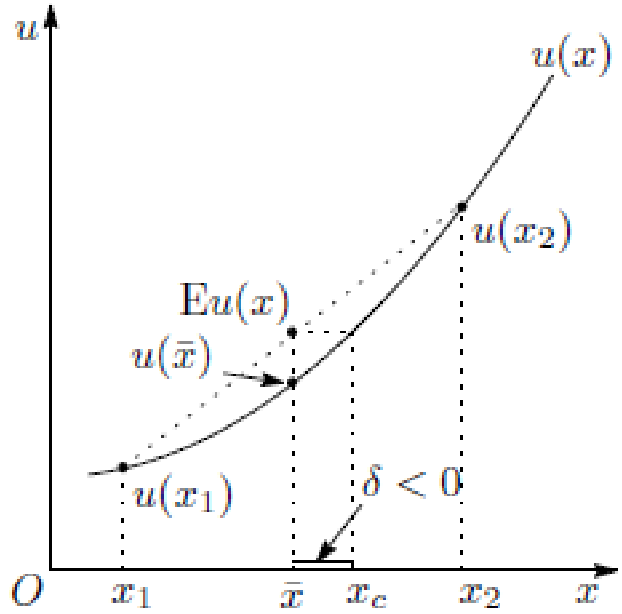
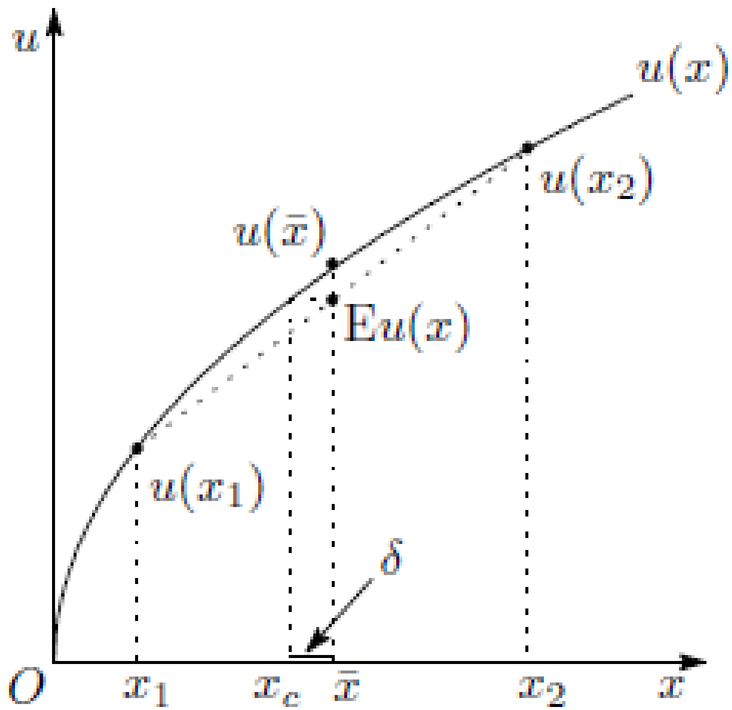


図 14.8　リスク愛好的

図はn=2, p_1=p_2=0.5のケース

リスク・プレミアム



確実性等価額　certainty equivalent　x_C

$$Eu(x) = u(x_C)$$

リスク・プレミアム risk premiumu　δ

$$\delta = \bar{x} - x_C$$

（不確実なxをどの位割り引いて評価するか）

ただし，$\bar{x} = \mathrm{E}x$　（xの期待値）

$\delta > 0$　危険回避者

$\delta = 0$ 危険中立者

$\delta < 0$ 危険愛好者

危険回避の程度は$u(x)$の曲がり具合（$u'(x)$の逓減度合い）に依存

危険回避度

- 絶対的危険回避度
  - measure of absolute risk aversion

$$R_A = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

- 相対的危険回避度
  - measure of relative risk aversion

$$R_R = -\frac{x\,u''(x)}{u'(x)}$$

- 相対的危険回避度一定の効用関数

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\sigma} x^{1-\sigma} & (\sigma \neq 1) \\ \ln x & (\sigma = 1) \end{cases}$$

- 絶対的危険回避度一定の効用関数　$u(x) = -\exp(-\sigma x)$

保険の原理

あらかじめ保険料を支払う

→事故の際に給付が支払われる

→個々人のリスクの減少

（完全な保険の場合 → リスクを完全に除去）

- 各人の事故確率が独立で同一で，保険加入者が十分に大きければ，集団全体としては，事故の発生についての不確実性がなくなる（**大数の法則**）
- 各人の事故確率が独立でない場合
  - 集団としての不確実性は残る
  - 例）　伝染病

保険の原理(2)　医療保険の例

- モデル
  - 効用関数　$u(x)$
  - 健康時の所得：　w
  - 病気：　hだけの所得低下と等しい効果
  - 病気にかかる確率　p
    - 各人の疾病確率は同一で互いに独立であるとする
  - 保険料：　ρ
  - 給付：　$b=h$（完全な保険：事故をフルにカバー）
- 保険数理的にフェアな保険

$$\rho = p \cdot b = p \cdot h \qquad (*)$$

給付の期待値と保険料負担が等しい

保険の原理(3)

- 保険が無い場合の期待効用

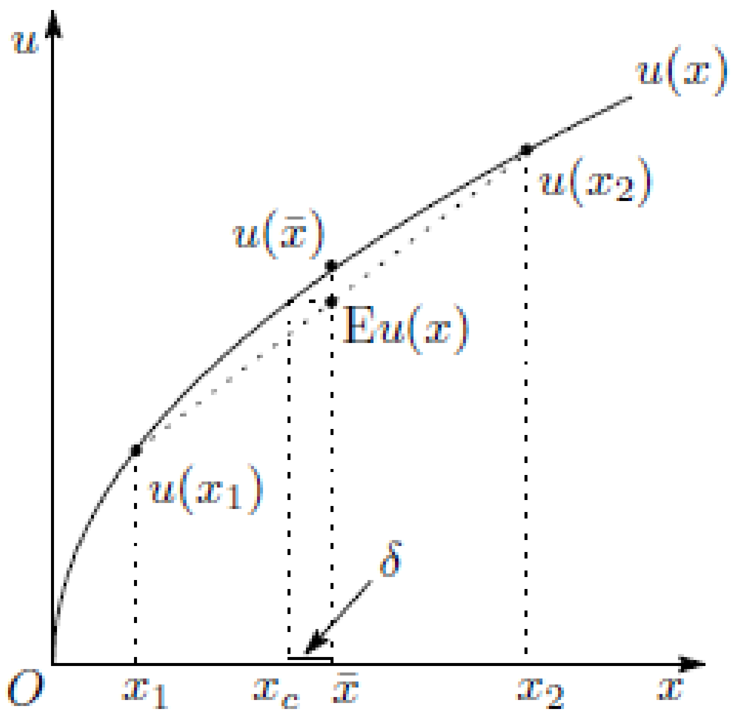
$$p \cdot u(w-h) + (1-p) \cdot u(w)$$

- 保険が存在する場合の期待効用

$$p \cdot u(w-\rho-h+b) + (1-p) \cdot u(w-\rho)$$
$$= u(w-\rho) = u(w-p \cdot h)$$

  - 完全な保険（b=h）が存在し，その保険が保険数理的にフェアーなものなら（$\rho = p \cdot b = p \cdot h$），個々人の期待効用は$u(w–ph)$に等しくなる（$w–ph$：所得の期待値）

保険の利益



保険数理的にフェアーな完全保険の存在 → 所得の期待値$w-ph$ が確率1で実現するのと同等（左図の$\bar{x}$が確率1で実現する）

保険が存在しない場合，個々人は所得の変動に直面（左図のE$u(x)$が実現するのと同じ）。あるいは，その確実性等価額 x_Cが実現するのと同じ

保険の利益

$$u(\bar{x}) - Eu(x) = u(\bar{x}) - u(x_C)$$

所得に換算すればリスク・プレミアムだけの利益があるのと同じこと

保険の利益：数値例　(1)

- 健康時の所得　w
- 病気時の所得　$w(1-a)$
  - 平常時の所得のa×100%が失われるのと同等
- 病気になる確率　p

- 完全な保険　$b = w \cdot a$
  - 給付bは病気による損失を完全にカバー
- 保険料　$\rho = p \cdot b = p \cdot w \cdot a$
  - 保険数理的にフェアーな保険料を仮定
  - 保険料拠出rと給付の期待値が一致する

- 保険の存在しない場合の期待効用　$(1-p)u(w) + pu(w(1-a))$
- 保険の存在する場合の期待効用　$u(w-\rho) = u(w(1-pa))$

保険の利益：数値例　(2)

- 期待効用関数　$u(x) = \ln x$ の場合
  - 保険のある場合の期待効用

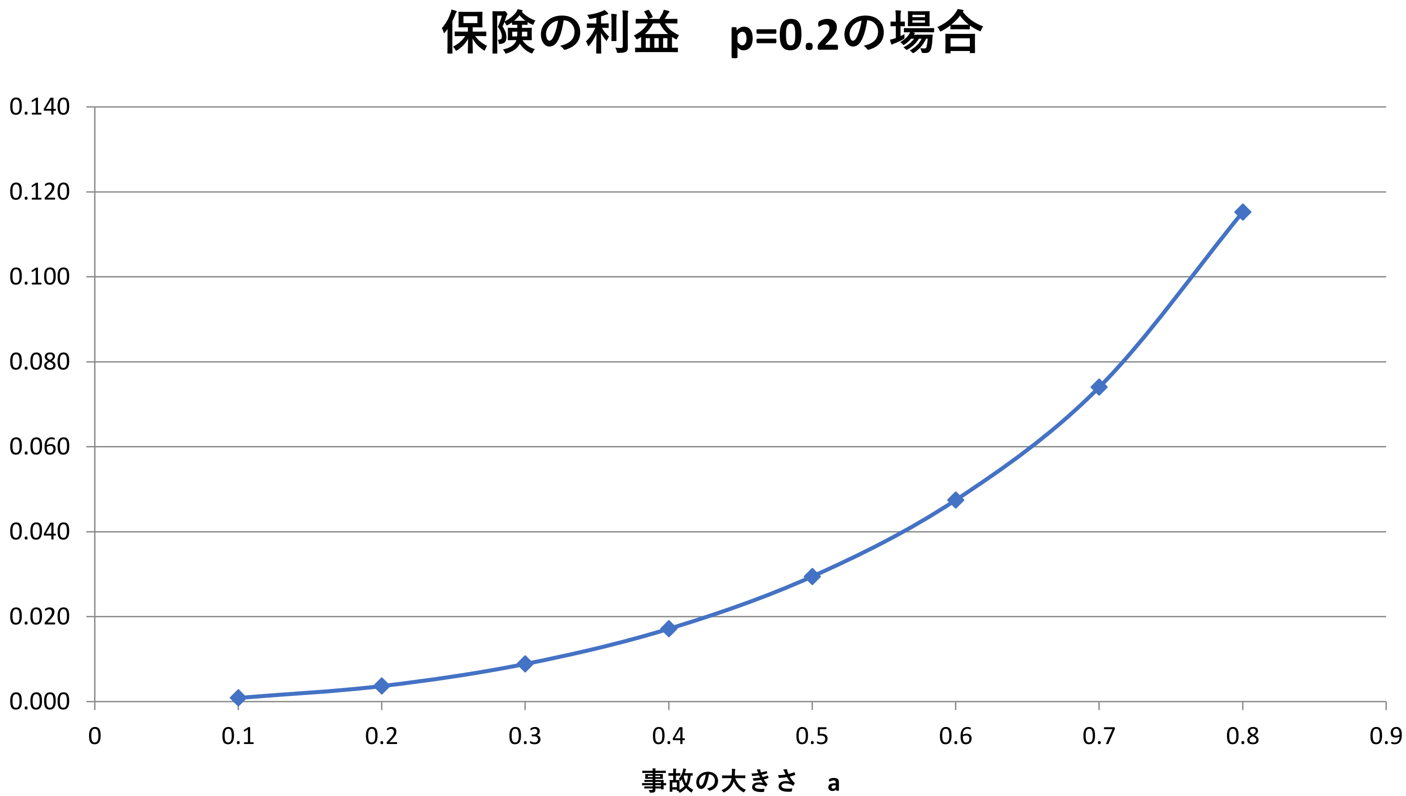
$$u(w-\rho) = u\big(w(1-pa)\big) = \ln w(1-pa)$$
$$= \ln w + \ln(1-pa)$$

  - 保険のない場合の期待効用

$$(1-p)u(w) + pu\big(w(1-a)\big) = (1-p)\ln w + p\ln w(1-a)$$
$$= \ln w + p\ \ln(1-a)$$

    - 確実性等価額　$w_c = w(1-a)^p$
- w=1.0とし，p,aの値を適当に与え，保険の無い場合の期待効用を求めよ（Excelで）
- 保険のない場合の期待効用 → 逆算して，確実性等価額を求めることができる

保険の利益：数値例　(3)



w=1.0とした。保険の存在する場合の所得w(1-pa)と，保険の存在しない世界での確実性等価所得wc = w(1-a)p の差額で保険の利益を計算

保険市場の失敗

- 自由な市場で保険がうまく供給されれば公的保険の根拠はほとんど無い
- 公的保険の根拠 → 市場の失敗
- 保険加入者と保険会社の間の（事故確率に関する）情報の非対称性
  - 加入者は自身の事故確率をよく知っている
  - 保険会社は加入者全員の平均値しか知らない
  - → 逆選択(adverse selection)の発生
  - 最悪の場合，保険が民間では提供されない
  - →保険への強制加入が事態を改善

保険市場の失敗(2)

- 失業保険
- 公的年金保険
- 介護保険
- 自動車事故に対する保険
- 火災保険

- 逆選択，モラル・ハザード

ポートフォリオ選択
平均・分散アプローチ

予算制約

$$A = \sum_{j=1}^{n} w_j (1 + r_j) A_0$$

A_0: 期首資産，A：期末資産　；w_j ：j番目の資産への投資割合；　r_j: j 番目の資産の収益率（確率変数）

効用関数

$$U = U(\mu_R, \sigma_R)$$

μ_R,　σ_R: ポートフォリオ全体の収益率の期待値と分散
効用関数が2次関数，または各資産の収益率が正規分布で表される場合 →　平均・分散アプローチ

1つの危険資産と1つの安全資産の場合

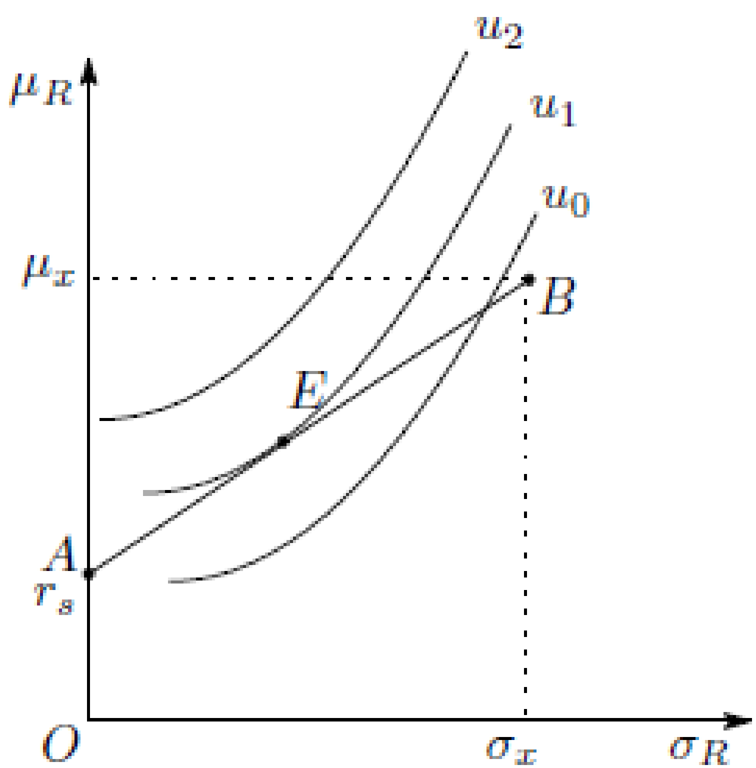


図 14.9　平均分散アプローチ

A点：　安全資産の収益率の期待値と標準偏差
B点:　危険資産の収益率の期待値と標準偏差

無差別曲線
　より高いリスク（標準偏差）を受け入れるためには，収益率の期待値が十分に高くなっていかなければならない

図では，E点が最適な点

2種類の危険資産

複数の資産の収益率に相関があると,
ポートフォリオ全体の分散を減らす
ことが可能

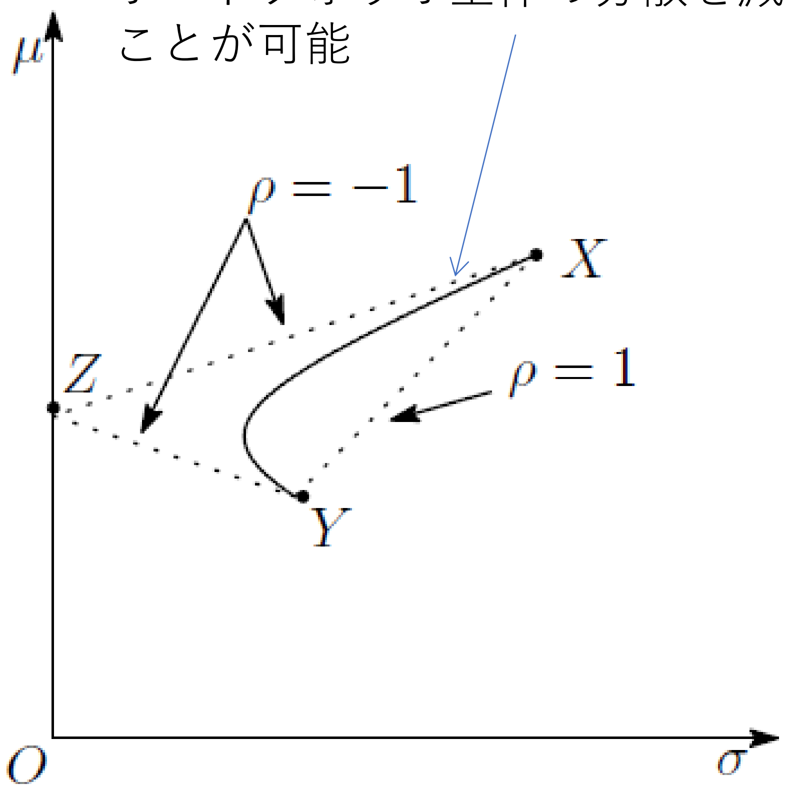


図 14.10　2 種類の危険資産

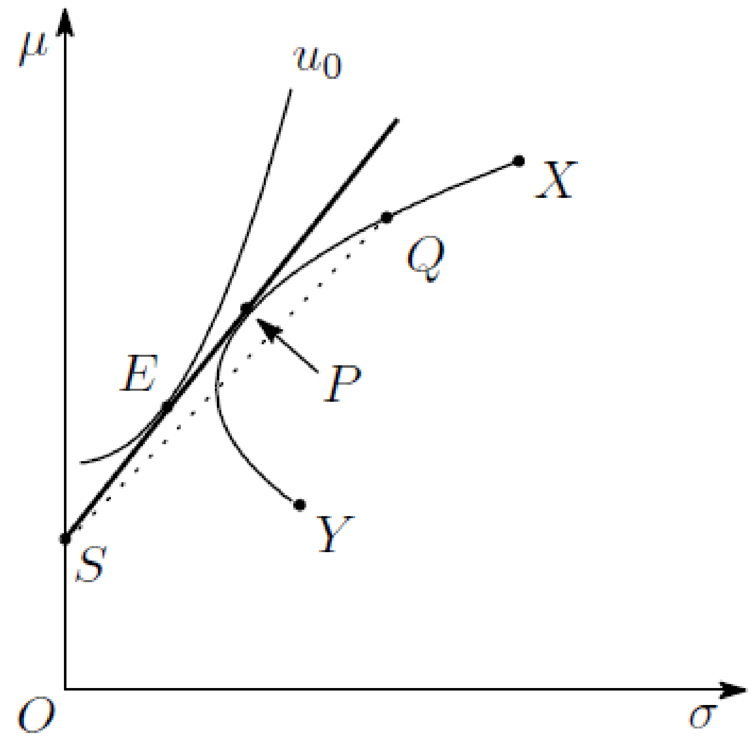


図 14.11　分離定理

2種類の危険資産と1種類の安全資産

分散投資と保険の原理の違い

- 保険
  - 同程度のリスクを持つものが共同でリスクを負担
  - 各人のリスクは互いに独立
  - 個々人であればリスクにさらされるが，集団としてのリスクは無くなる（大数の法則）
- 分散投資
  - 危険資産への投資
  - 危険資産の収益率の相関が0ではない
  - 危険資産をうまく組み合わせると，個々の危険資産の収益率よりも分散を小さくすることができる