消費者行動の理論(1)

- 効用関数
  - 1財のケース
    - 効用関数の性質
    - 限界効用
  - 2財のケース
  - 無差別曲線，限界代替率
- 予算制約
- 効用最大化の条件
- n財モデル

効用関数 utility function

効用(utility)

財(goods)の消費から消費者が得る満足感

効用関数　　財の消費量(x)と効用(U)の対応関係

$$U=U(x)$$

限界効用(marginal utility)

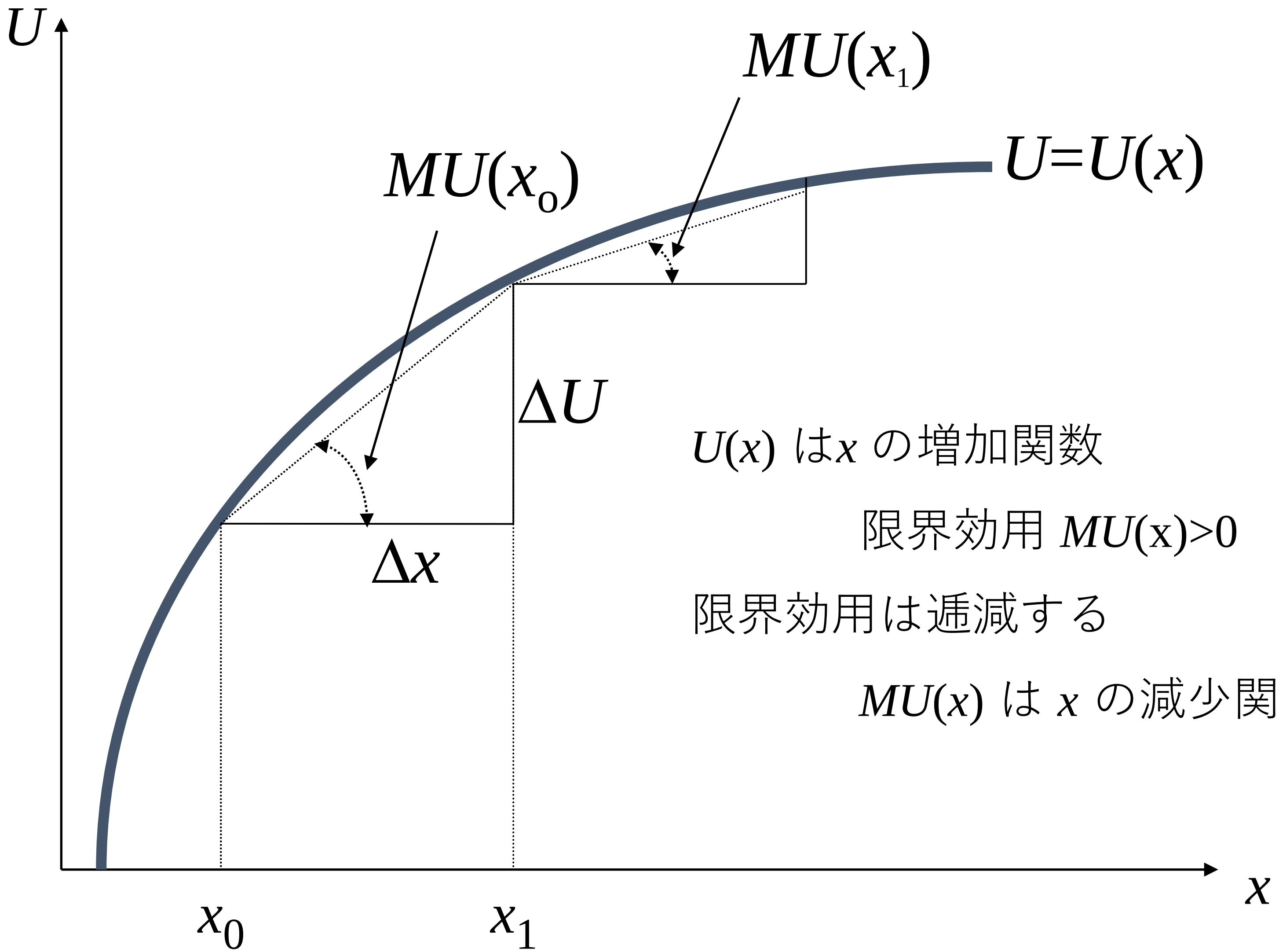
- 財を1単位追加的に消費した場合の効用の増分

$$MU(x)=\frac{U(x+\Delta x)-U(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

効用関数の性質

- $U(x)$ は x の増加関数
  - たくさん消費すればそれだけ満足が高まる
  - 消費の飽和点は存在しない
- 限界効用 $MU(x)$ は x の減少関数
  - 限界効用逓減の法則(the law of diminishing marginal utility)
  - 財の消費が増えるにつれて，追加的1単位の消費のもたらす満足感は減少していく

効用関数　1財のケース



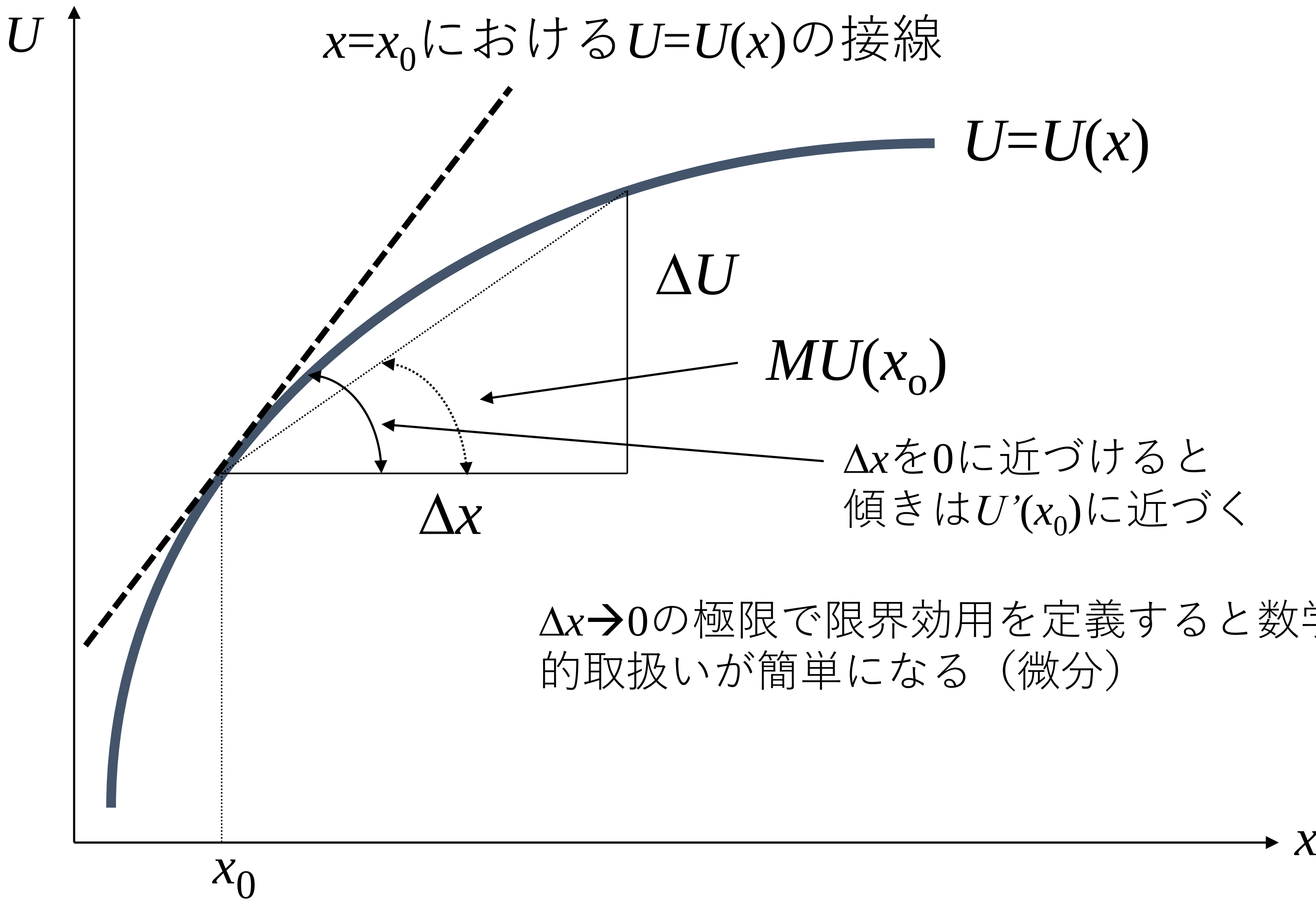
$U(x)$ はx の増加関数

限界効用 MU(x)>0

限界効用は逓減する

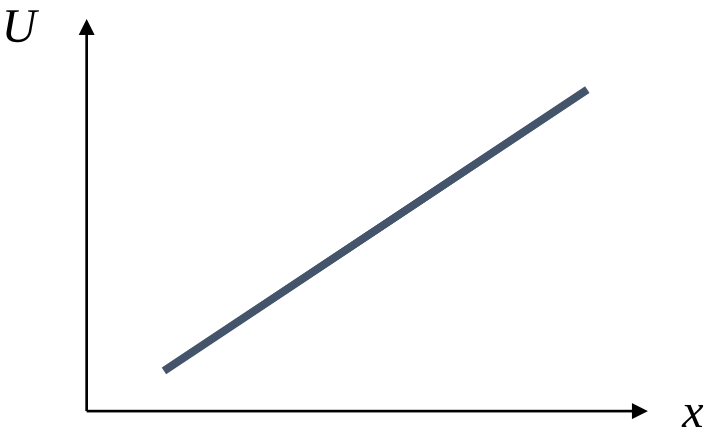
$MU(x)$ は x の減少関数

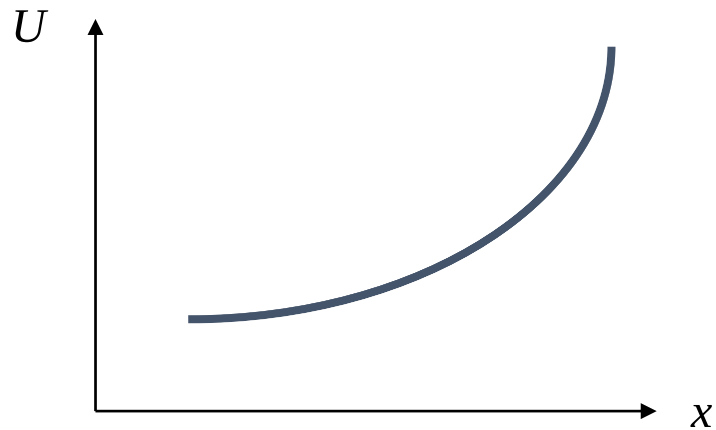
限界効用(marginal utility)

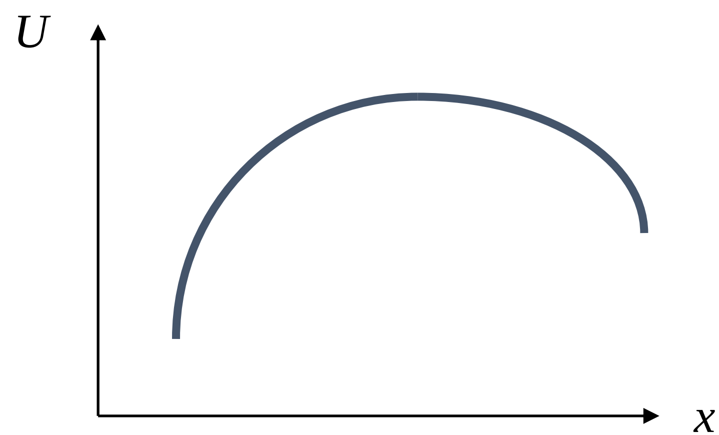


Δx→0の極限で限界効用を定義すると数学的取扱いが簡単になる（微分）

Q. 次の曲線は効用関数として適当か







x

効用関数　2財のケース

- $U=U(x, y)$

　　x：　財 x の消費量　　　　　　y：　財 y の消費量

- 効用関数の性質
  - y を一定にして，x を増加させれば，U は増加する→効用の増分ΔUはプラス
  - y を一定にして，x を増加させていくとき，ΔUの大きさは xの増加につれて減少する
- 限界効用の正確な定義
- 効用をグラフでどう表現するか

限界効用　2財のケース

x の限界効用

$$MU_x(x_0, y_0) = \frac{U(x_0 + \Delta x, y_0) - U(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

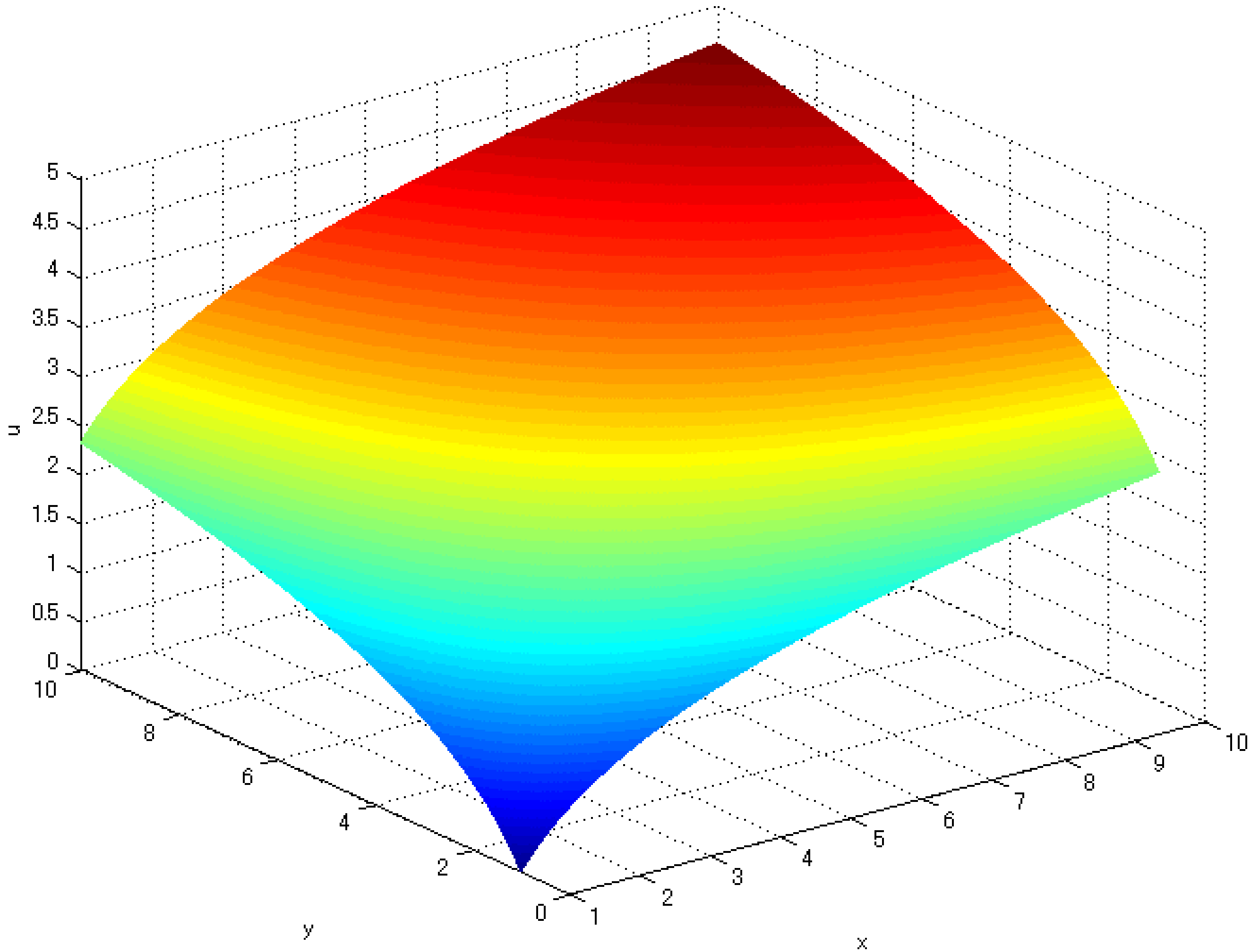
y の限界効用

$$MU_y(x_0, y_0) = \frac{U(x_0, y_0 + \Delta y) - U(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

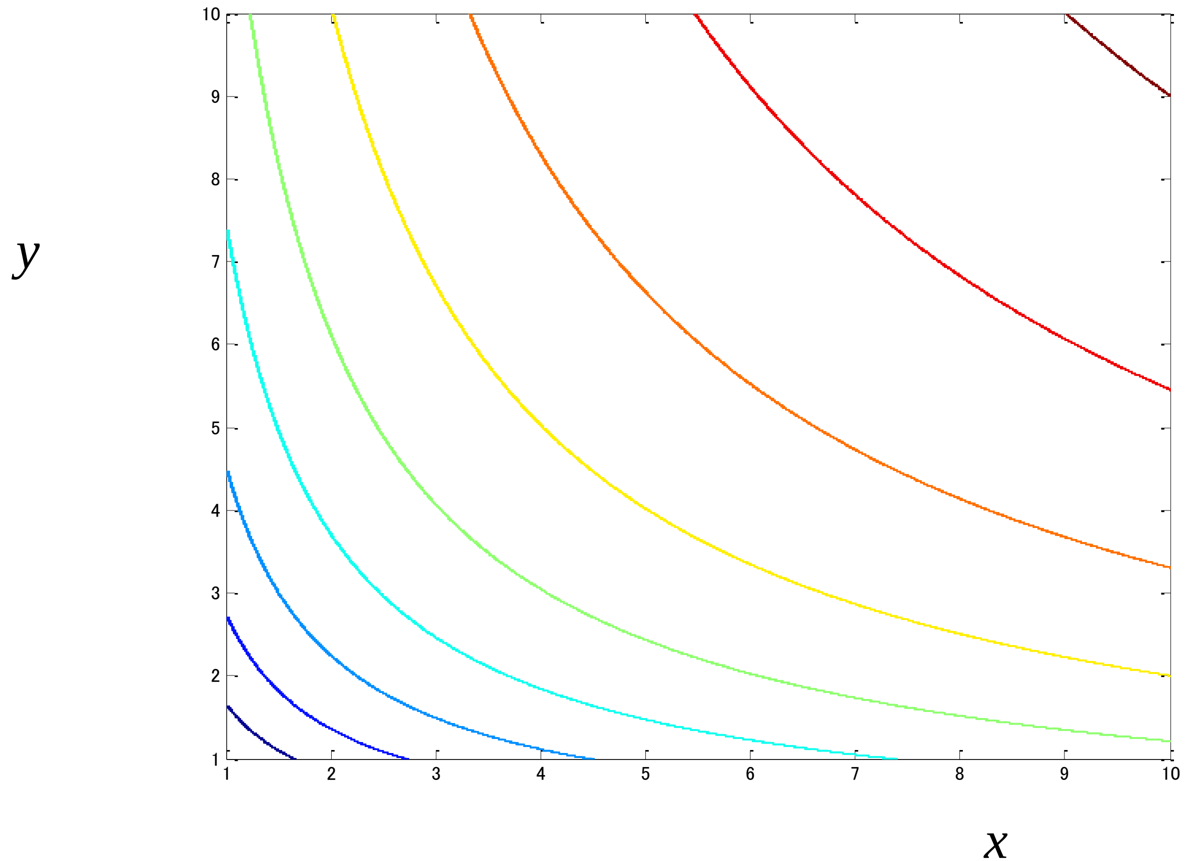
$MUx>0$, $MUy>0$

2財のケースでは，xの限界効用（yの限界効用）はxの増加ともに減少しなくてもよい

効用関数　$U(x,y)=\log(x)+\log(y)$



無差別曲線(indifference curve)



無差別曲線(indifference curve)

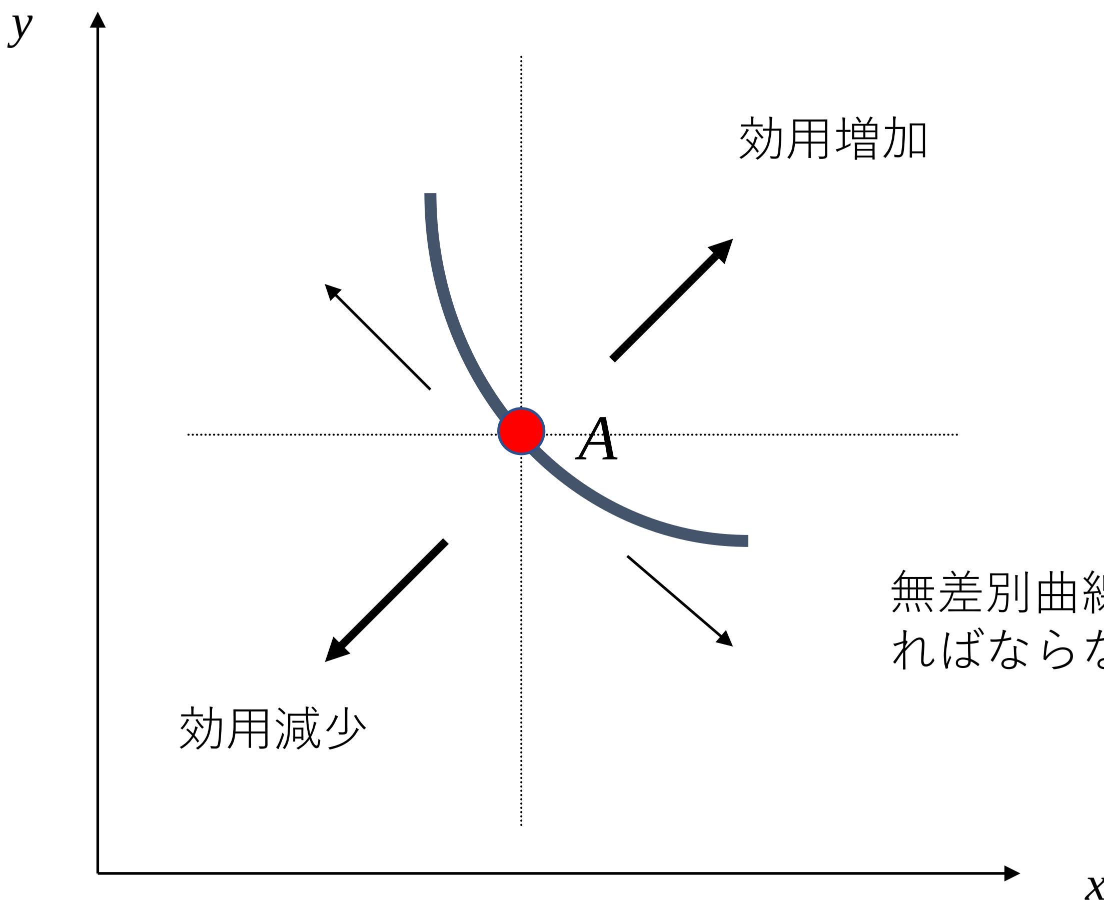
等しい効用をもたらす (x, y) の集り

- $U(x, y) = u_0$ をみたす(x, y) の集合
- 地図の等高線

無差別曲線の性質

1. 原点から遠いほど高い効用
2. 無差別曲線は右下がりの曲線
3. 無差別曲線は交わらない
4. 原点に対して凸

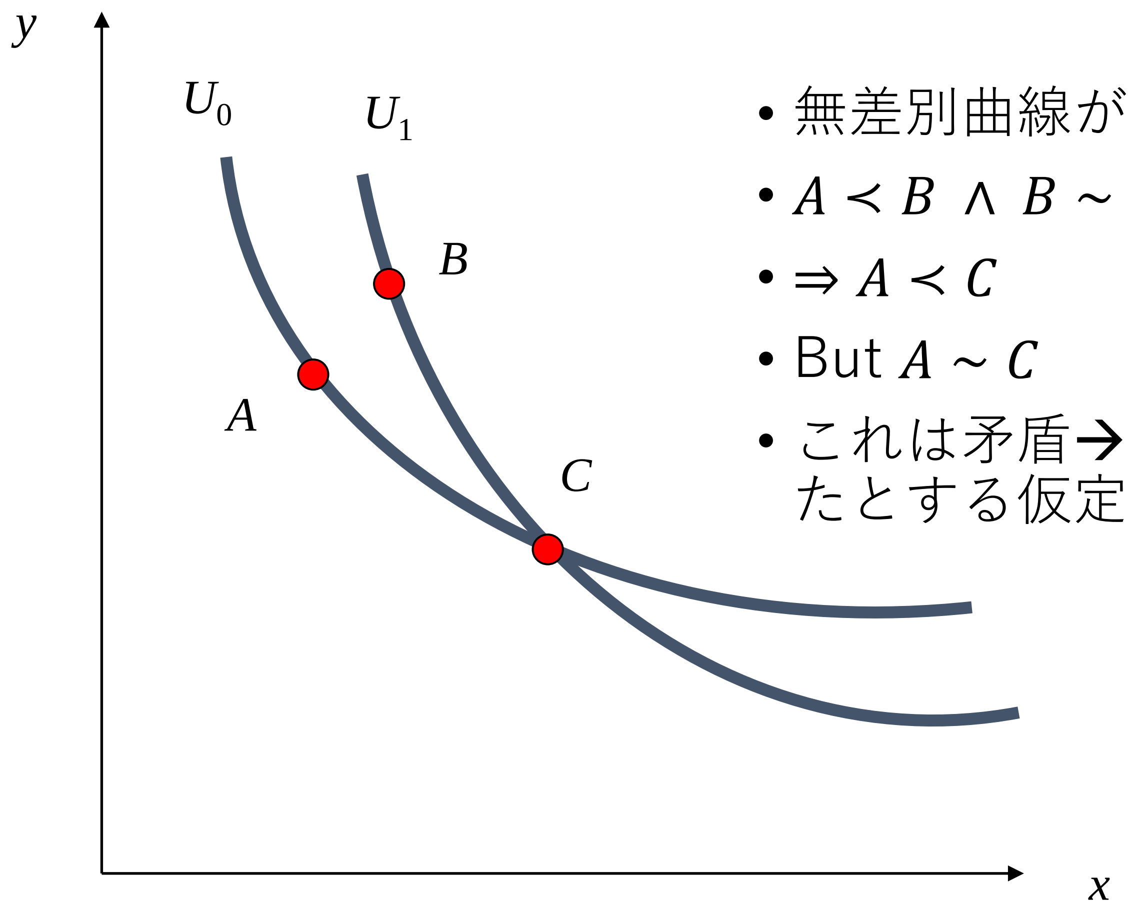
無差別曲線の性質(1)



無差別曲線は右下がりでなければならない

無差別曲線の性質(2)

無差別曲線は交わらない

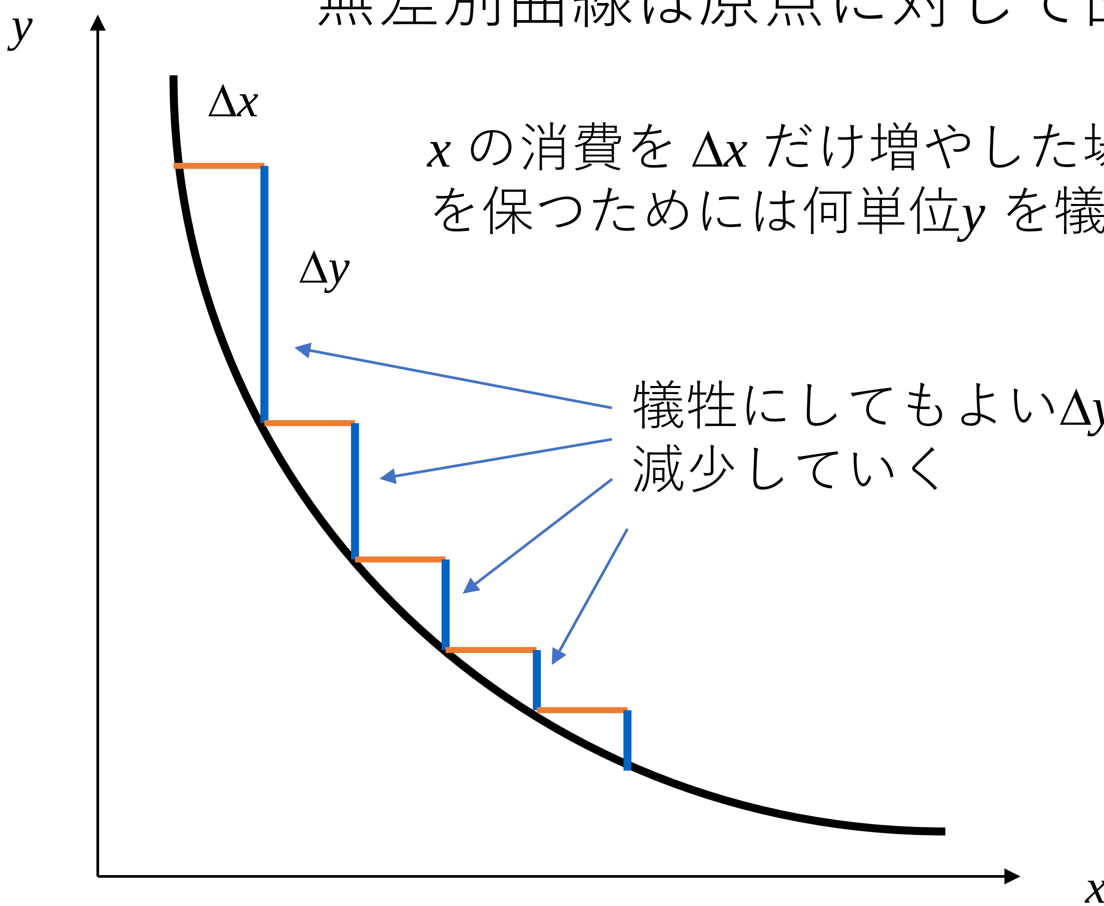


- 無差別曲線が交わったとする
- $A \prec B \ \wedge \ B \sim C$
- $\Rightarrow A \prec C$
- But $A \sim C$
- これは矛盾→無差別曲線が交わったとする仮定が正しくない

無差別曲線の性質(3)

無差別曲線は原点に対して凸

x の消費を Δx だけ増やした場合，同一の効用を保つためには何単位y を犠牲にしてもよいか。



犠牲にしてもよいΔyがxの増加とともに減少していく

限界代替率　marginal rate of substitution

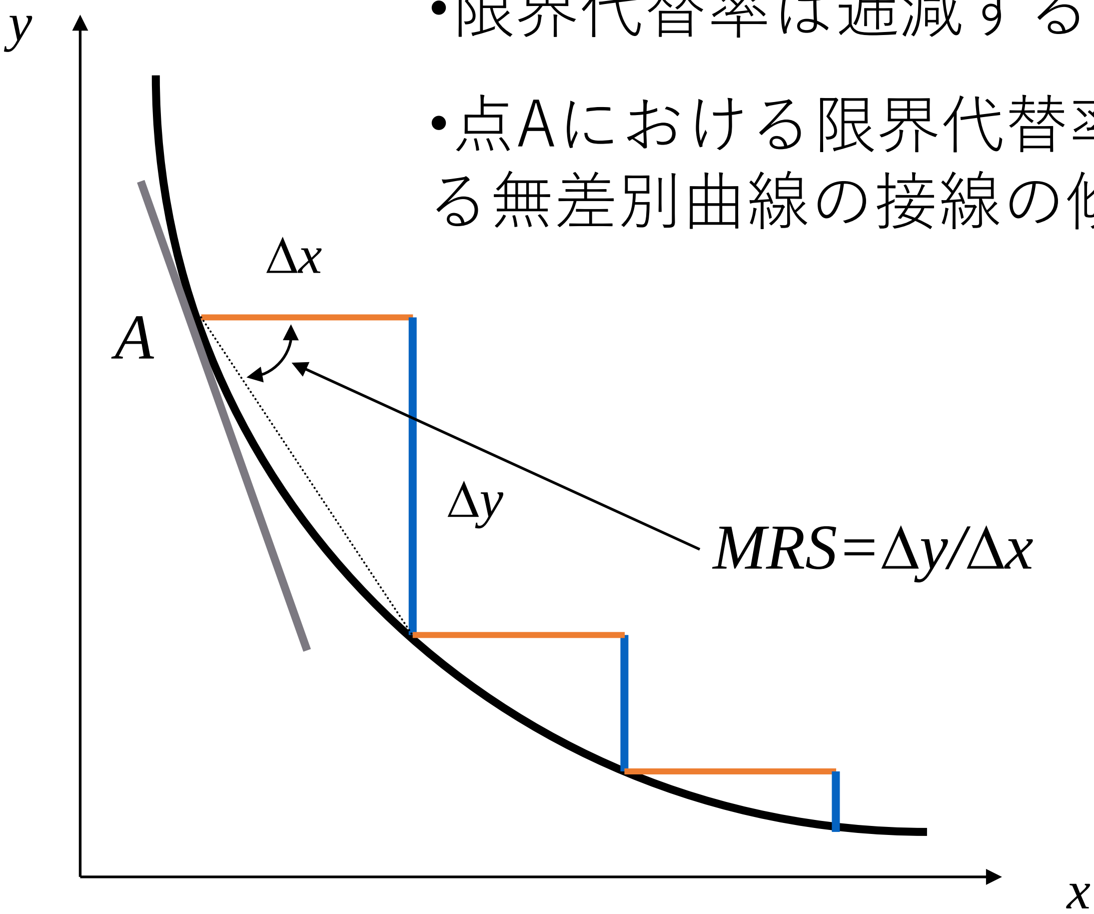
定義

- xを1単位追加的に消費した場合に，同一の効用を保つためには何単位のyを犠牲にしてもいいか
- <u>xの追加的1単位に対する</u>消費者の<u>（主観的）評価</u>：ただし，yの数量で表している

無差別曲線が原点に対して凸

- 限界代替率逓減の法則　（the law of diminishing marginal rate of substitution）
- 1財のケース：「限界効用逓減の法則」

限界代替率(2)



- 限界代替率は逓減する
- 点Aにおける限界代替率は，点Aにおける無差別曲線の接線の傾きで近似できる

限界代替率(3)

Δxだけxの消費を増やすと，$MU_x\Delta x$だけ効用が増加する

Δyだけyの消費を減らすと，$MU_y\Delta y$だけ効用が減少する

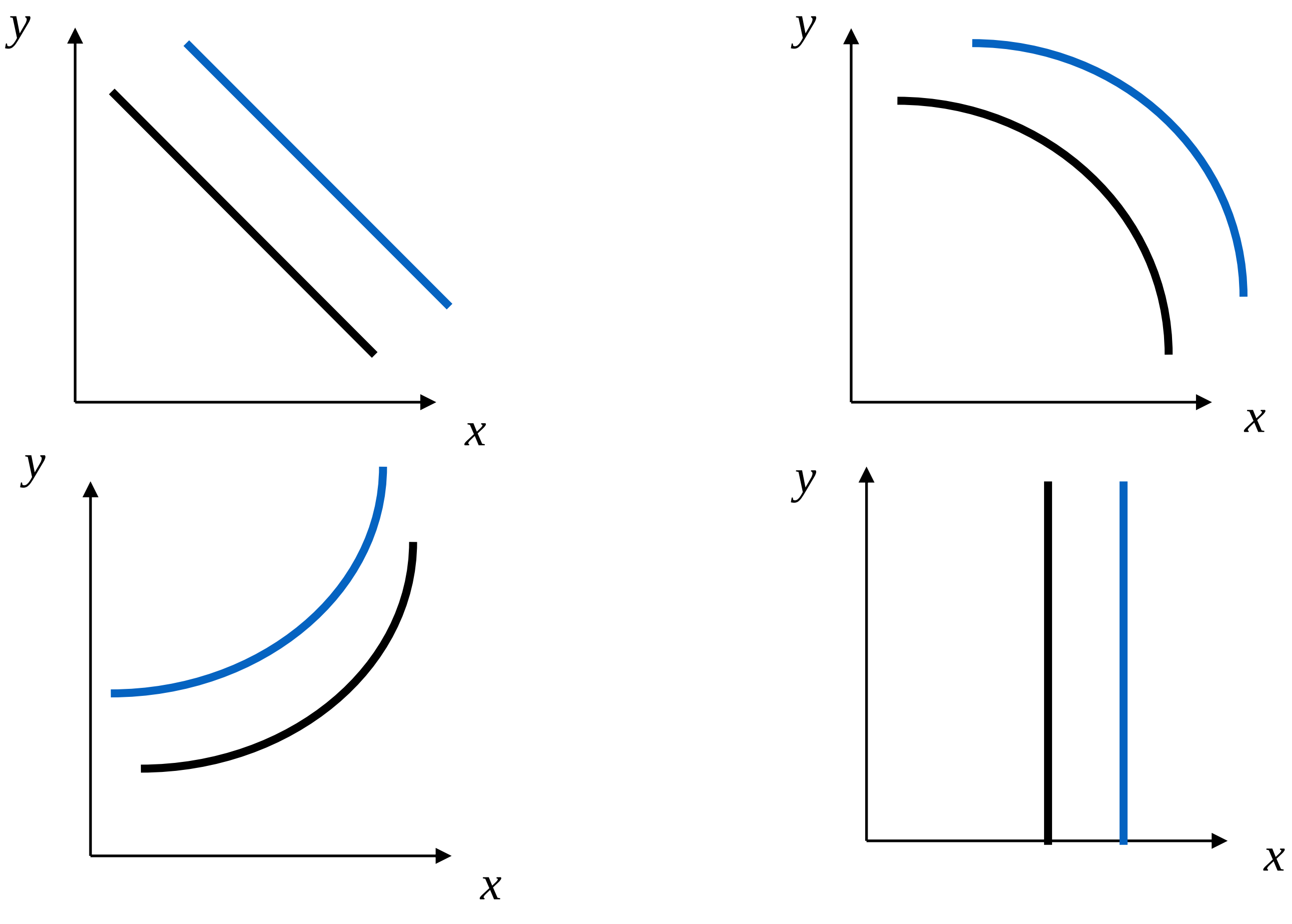
無差別曲線に沿った移動では，これらがちょうど相殺されなければならないから，次の式が成立する

$$MU_x \cdot \Delta x = MU_y \cdot \Delta y$$

この関係から次の式が導かれる

$$MRS \equiv \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{MU_x}{MU_y}$$

Q.　無差別曲線が次のようなグラフだったら，消費者はどのような選好(preference)を持っているのだろうか



限界代替率逓減と限界効用の関係

$$(1)\quad U(x,y) = \sqrt{x \cdot y}$$
$$(2)\quad U(x,y) = x \cdot y$$
$$(3)\quad U(x,y) = x^2 \cdot y^2$$

- 上の効用関数の無差別曲線を描け
- y を固定しておいて x だけ増加させた場合の x と U の関係をグラフで表せ
- それぞれの関数で，限界効用は逓減するか

予算制約 budget constraint

p： 財 x の価格
q： 財 y の価格
I ：所得（Income）

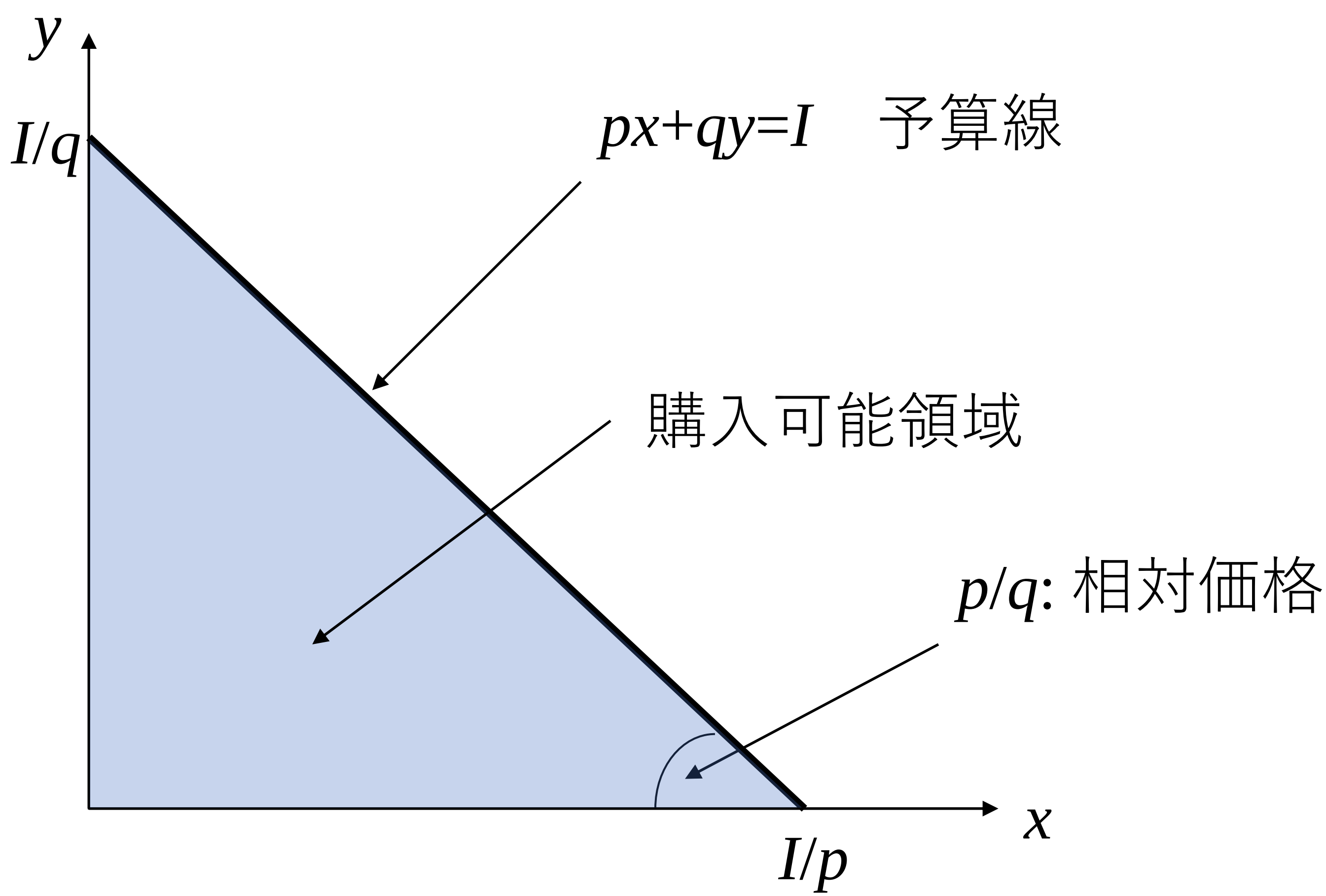
p, q, I は与えられている（消費者にとっては外生的）

x, y： それぞれの財の購入量（内生的）

予算制約式は次の式で与えられる。

$$px + qy \leq I$$

予算線　budget line



購入可能領域：$px + qy \leq I$ に $x \geq 0,\ y \geq 0$ という（暗黙の）制約を加えた領域

Q.予算線の変化

次のような変化が生じた場合，予算線はどう変化するか

- 家計の所得が変化した場合
- pが値上がりした場合
- qが値上がりした場合
- インフレのため，p, q, I が同一の比率で上昇した

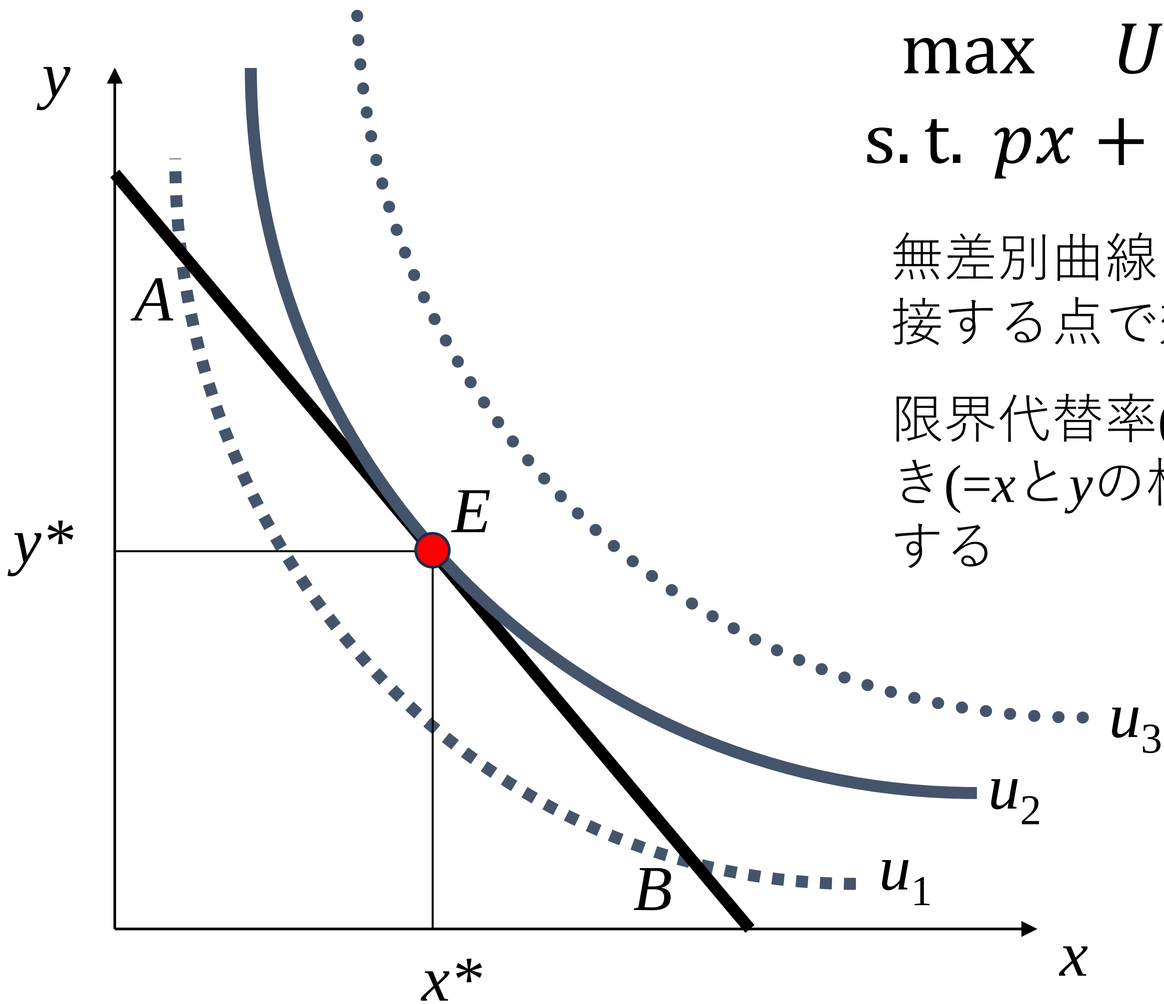
効用最大化

消費者の行動は次のように定式化される

- 予算制約 $px+qy \leq I$ のもとで効用 $U(x, y)$ を最大にするように (x, y) を選択する

$$\begin{aligned} &\max \quad U(x,y) \\ &\text{subject to} \;\; px + qy \leq I \end{aligned}$$

効用最大化(2)



$$\max \quad U(x, y)$$
$$\text{s.t. } px + qy \leq I$$

無差別曲線と予算線がちょうど接する点で効用が最大になる

限界代替率(*MRS*)と予算線の傾き(=xとyの相対価格=p/q) が一致する

効用最大化の（必要）条件

- 無差別曲線と予算線が接する
- 無差別曲線の接線の傾きと予算線の傾きが一致
- 限界代替率と相対価格の一致
  - $MRS = p/q$
- １円あたりの限界効用の均等
  - $MRS=MU_x/MU_y$であることを用いると　$\dfrac{MU_x}{p} = \dfrac{MU_y}{q}$

•yの消費を1円減少→ yの購入$(1/q)$単位減少→$(1/q)MUy$　効用低下

•xの消費を1円増加→ xの購入$(1/p)$単位増加→$(1/p)MUx$　効用増加

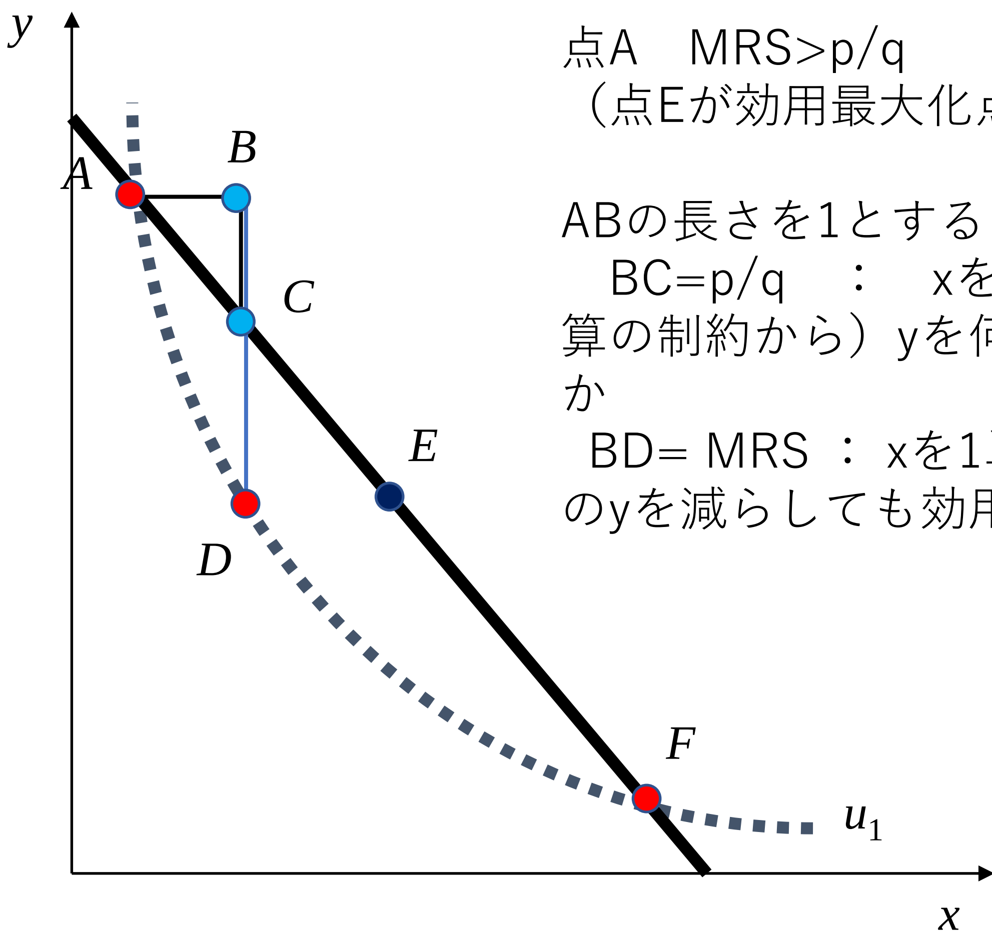
•効用が最大化されるためにはこれらが釣り合わなければならない（そうでなければ，効用を増加させる余地が残っている）

Question

- $MU_x/p>MU_y/q$ が成立しているとしよう。この場合，予算制約を守りながら効用を上げることができる。どのようにすればよいか。
- $MU_x/p > MU_y/q$ が成立している場合，予算線と無差別曲線はどのような状況にあるか。
- $MU_x/p < MU_y/q$ の場合について同様に考えよ。
- グラフからどのようにすれば，効用が上がるかを考えよ

MRS>p/qの場合

点Aで効用が最大化されていないのは何故か

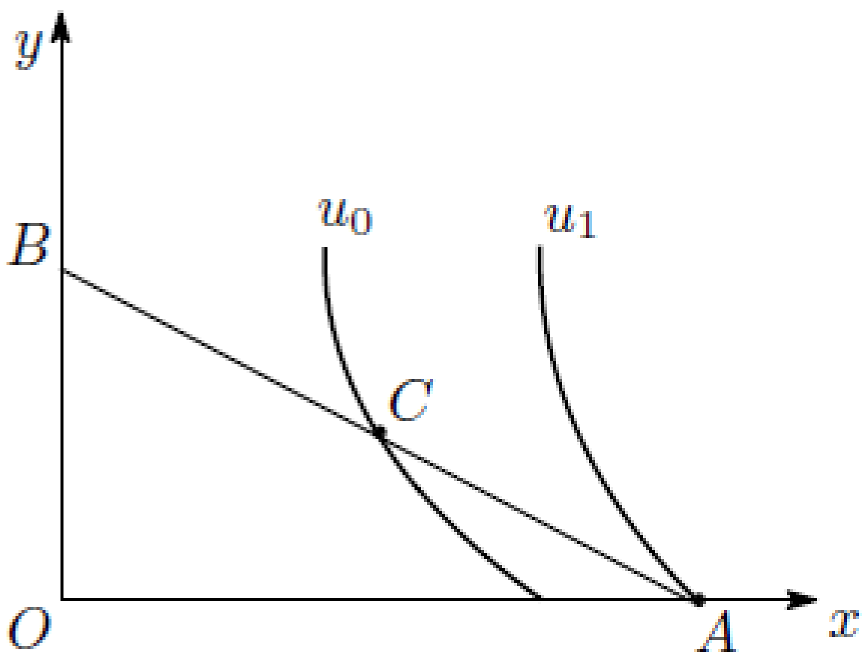


点A　MRS>p/q
（点Eが効用最大化点）

ABの長さを1とすると
　BC=p/q　：　xを1単位増やすためには，（予算の制約から）yを何単位犠牲にせざるを得ないか
　BD= MRS ：xを1単位増やすとき，この量だけのyを減らしても効用は不変

コーナー解

効用最大化点は，予算線と無差別曲線の接点でない場合もある。



点Cでは MRS>p/q

- → ｘの増加，ｙの減少が効用を増加させる
- → しかし，点Aに到達してもMRS>p/q
- → 効用最大化点は点A
- → y=0で効用最大化

2財モデルの解釈

- x財 : ある特定の財
- y財 : その他の全ての財
- 効用最大化の条件　$MRS=p/q$ または $\frac{MU_x}{MU_y}=\frac{p}{q}$
  - $q*y$はx財以外の財への支出合計。
  - $q=1$とすると　yの1単位は1円で買える財の量
  - MUy　は所得の限界効用
  - 効用最大化の条件は，所得の限界効用で評価したxの限界効用とxの価格が一致する
  - 限界便益（限界効用の金銭換算額）と価格が一致

n財モデル

n種類の財を $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 価格を $p_1, p_2, \ldots, p_n$ で表せば,

$$\begin{array}{rl} & \text{Max} \;\; U(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \text{s.t.} & \;\; p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n = I \end{array}$$

効用最大化の（必要）条件

任意のi,j $(= 1,2,\ldots,n)$について

$$MRS_{i,j} = \frac{p_i}{p_j}$$

ただし，$MRS_{i,j}$はi財とj財の限界代替率

x_iを追加的に1単位増やす場合，何単位のx_jを犠牲にしても効用は一定にとどまるかを表す