経済原論Ⅰ
マクロ経済学入門

no.12

麻生良文

経済成長論

- 経済成長の源泉
- 新古典派成長モデル(Solow モデル)
- 定常状態の決定
  - 貯蓄率の影響
  - 人口成長率の影響
- 望ましい状態
  - 黄金律の条件
  - 動学的非効率性，動学的効率性

経済成長の源泉

- 生産関数 $Y = F(A, K, L)$

　A:技術水準，K：資本ストック，L：労働力

- 成長会計　経済成長の要因分解

$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$　コブ・ダグラス型生産関数

　α:資本分配率，1-α:労働分配率

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha\frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha)\frac{\Delta L}{L}$$

経済成長率=技術進歩率＋労働の貢献分＋資本の貢献分

経済成長の源泉(2)

- 技術進歩率は，実際には残差として計測
- 労働者一人当たりの経済成長

$$\frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha\frac{\Delta K}{K} - \alpha\frac{\Delta L}{L}$$

より

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha\frac{\Delta k}{k}$$

y=*Y*/*L*(労働者一人当たり産出量）

k=*K*/*L*（労働者一人当たり資本ストック：資本労働比率）

経済成長の源泉(3)

- 労働者一人当たり産出量の増加は技術進歩率と資本労働比率の変化から説明できる
- 過去の経済成長において技術進歩（労働者一人当たりの資本では説明できない部分）が大きかった
- 技術進歩：人的資本の蓄積?
- 新古典派成長モデル(Solow モデル）では，資本の蓄積がy（労働者一人当たりの産出量）にどのような影響を与えるかを分析する

新古典派成長モデル Solow モデル

生産関数

$$Y_t = F(K_t, L_t) \tag{1}$$

資本ストックの推移式

$$K_{t+1} = K_t(1-\delta) + I_t \tag{2}$$

貯蓄と投資の均等 & 貯蓄関数

$$I_t = S_t = sY_t \tag{3}$$

労働力の推移式

$$L_{t+1} = (1+n)L_t \tag{4}$$

新古典派成長モデル(2)

モデルの特徴

1. K_t, L_tが与えられる
2. $Y_t = F(K_t, L_t)$
3. $S_t = sY_t$と$S_t = I_t$から時点tの投資が決まる
4. 次の期の資本ストックK_{t+1}が決まる
5. 次の期の労働力は$L_{t+1} = (1+n)L_t$で決まる
6. 1．に戻る

* $S_t = I_t$は貸付資金市場の均衡（財市場の均衡条件と同値）

生産関数の性質

- 生産関数→規模に関する収穫一定
- 生産関数$F(K,L)$が規模に関する収穫一定の性質を持つとは，任意のλ>0に対し，

$$F(\lambda K,\lambda L)=\lambda F(K,L)$$

が成り立つこと

コブダグラス型生産関数$F(K,L)=K^{\alpha}L^{1-\alpha}$の場合

$$F(\lambda K,\lambda L)=(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha}=\lambda K^{\alpha}L^{1-\alpha}=\lambda F(K,L)$$

が成立する。→ $F(K,L)=K^{\alpha}L^{1-\alpha}$は規模に関する収穫一定

労働者一人当たり産出量 y

生産関数（規模に関する収穫一定を仮定）

$$Y = F(K, L)$$

y=Y/Lと, k=K/Lとして，生産関数の両辺をLで割ると

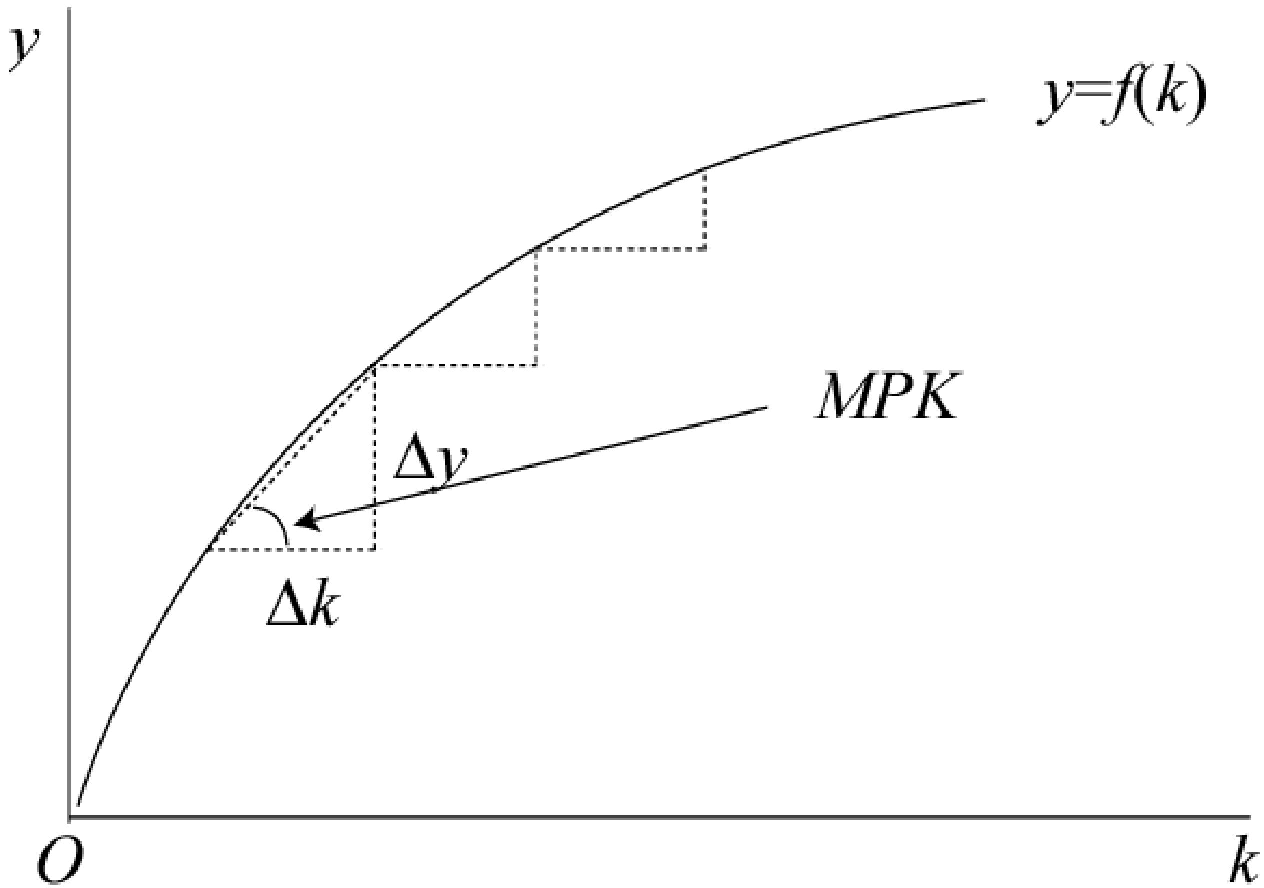
$$y = \frac{1}{L}F(K, L) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1)$$

となり，y（労働者一人あたり産出量）がk（資本労働比率）のみの関数で表されることがわかる。$F(k, 1) \equiv f(k)$とおけば（労働者一人あたりでみた）生産関数は次のように表される

$$y = f(k)$$

- 例）$F(K, L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}$の場合，$y = f(k) = k^{\alpha}$となる

生産関数の形状



Solowモデルを労働者一人の変数で表す

資本ストックの推移式

$$K_{t+1} = K_t(1-\delta) + sY_t$$

$I_t = S_t$, $S_t = sY_t$を用いた（(2)式と(3)式を集約）

両辺を$L_{t+1} = (1+n)L_t$で割ると

$$\frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{1}{1+n}\left[\frac{K_t}{L_t}(1-\delta) + s\frac{Y_t}{L_t}\right]$$

したがって

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}[k_t(1-\delta) + sf(k_t)]$$

- Solowモデルは上の一本の式に集約された

資本労働比率の推移式(2)

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[k_t(1-\delta) + sf(k_t)\right] \qquad (*)$$

- [　]の中の第1項：時点tの生産で資本を使用し，減耗しないで残った部分
- ［　]の中の第2項：投資（=貯蓄）によって付け加えられた資本
- $1/(1+n)$：人口成長に応じて，労働者一人当たりの資本が減少する効果
- k_tの初期値が与えられると，(*)式にしたがって次の期のkが逐次的に決まっていく

定常状態

- 定常状態：k_t　等の変数が一定の値をとり続ける状態
- あるkの水準から出発して，十分に時間が経過すると，kの値は一定の値に収束していくことが知られている（もちろん，ある条件の下で）
- k_{t+1}=k_t=kとして定常状態のkを求める

(*)式より定常状態のkは次の方程式を満たさなければならないことがわかる

$$k(1+n) = k(1-\delta) + sf(k)$$

- この式を整理すると，定常状態のkは次の方程式の解であることがわかる

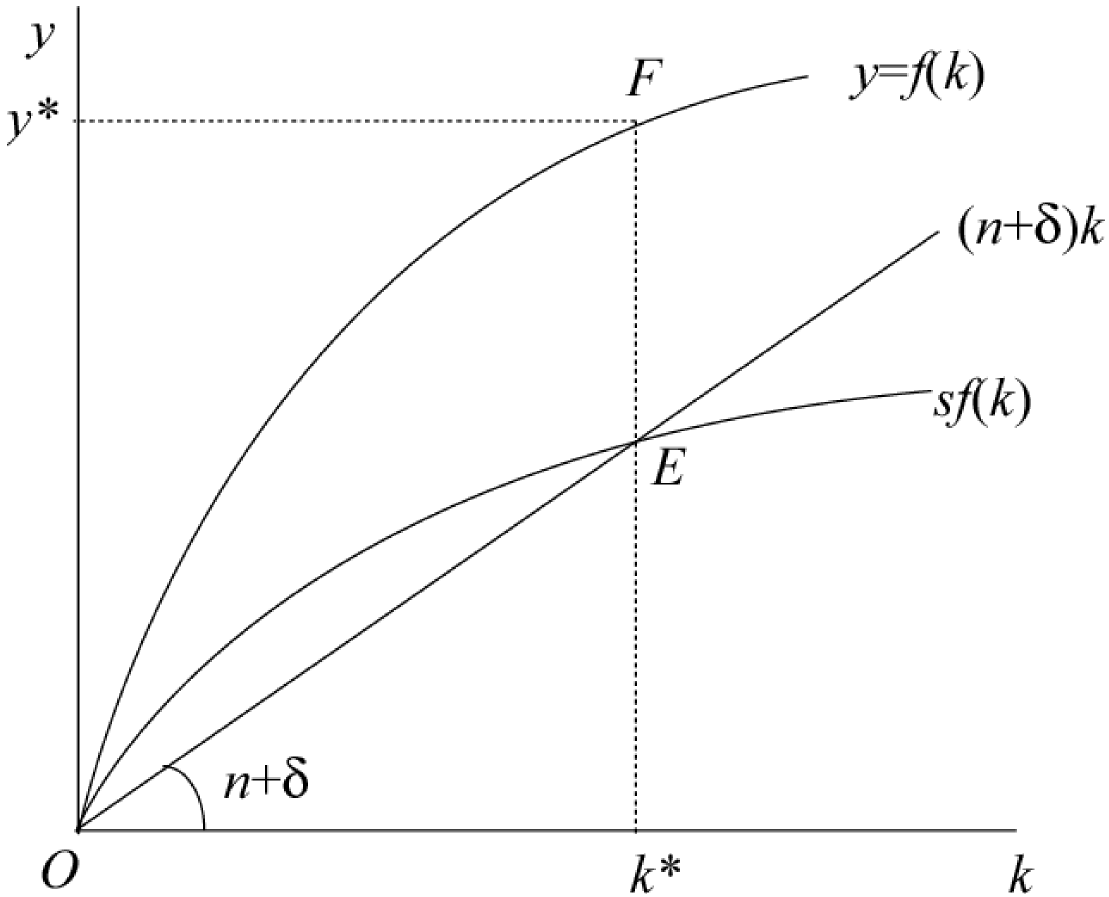
$$(n+\delta)k = sf(k)$$

$(n+\delta)k = sf(k)$ の意味

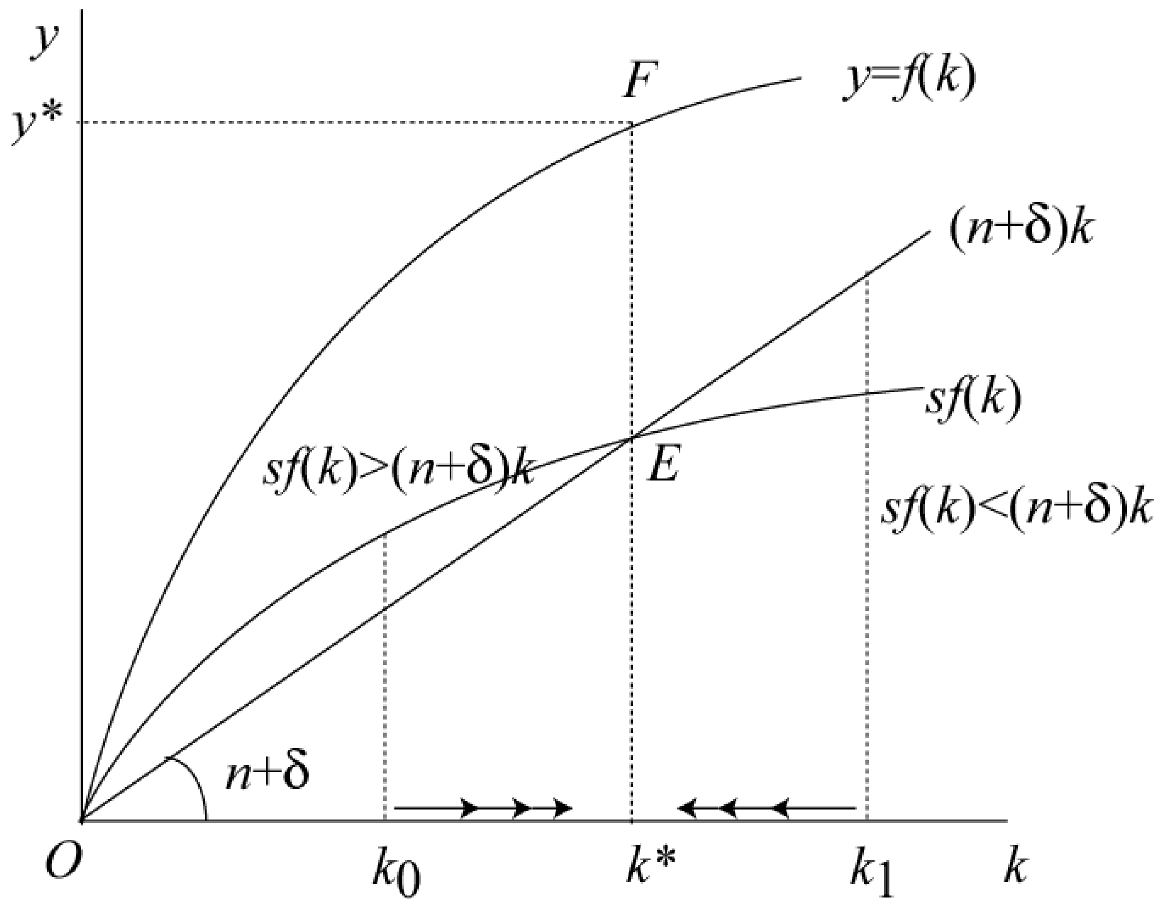
- δk：資本の減耗を補填するための投資（更新投資）
- nk：労働力の増加に応じてkを一定に保つために必要となる投資
- $(n+\delta)k$： kを一定に保つために必要な投資
- $sf(k)$：実際に行われる投資
- $(n+\delta)k > sf(k)$ ならkは減少
- $(n+\delta)k < sf(k)$ ならkは増加

定常状態の決定

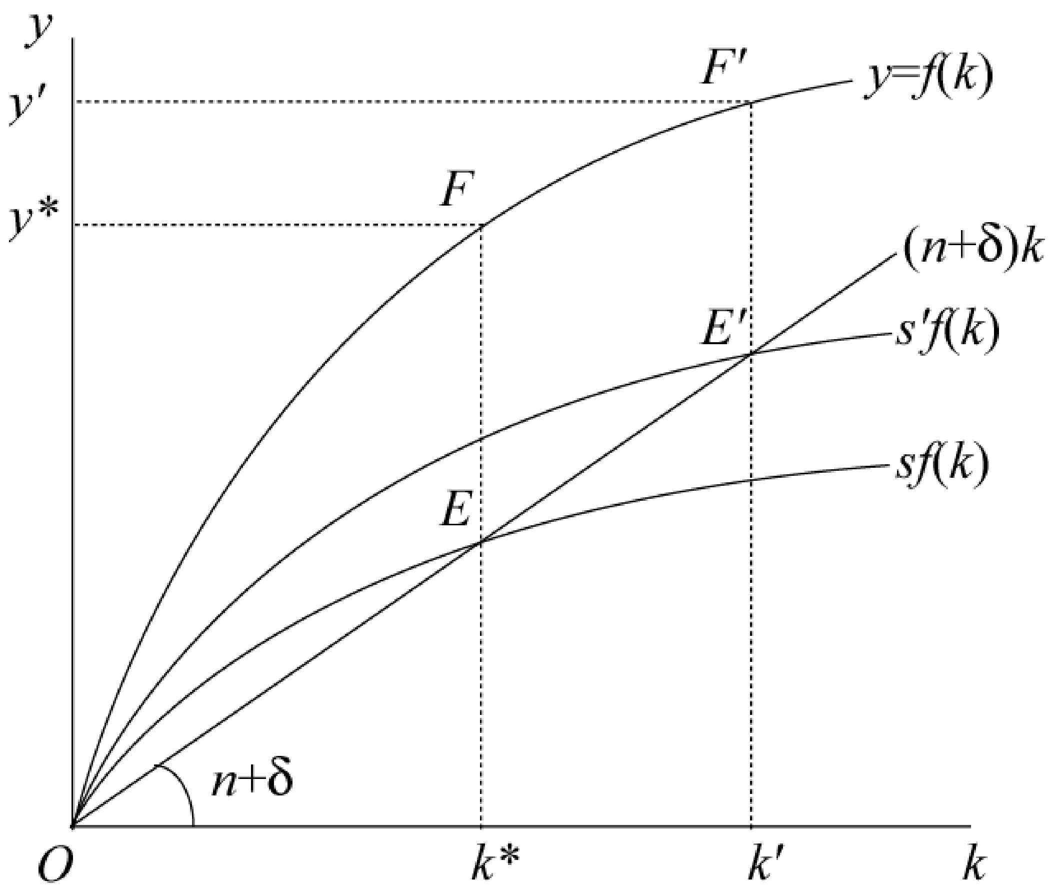
$$(n+\delta)k = sf(k)$$



定常状態への調整

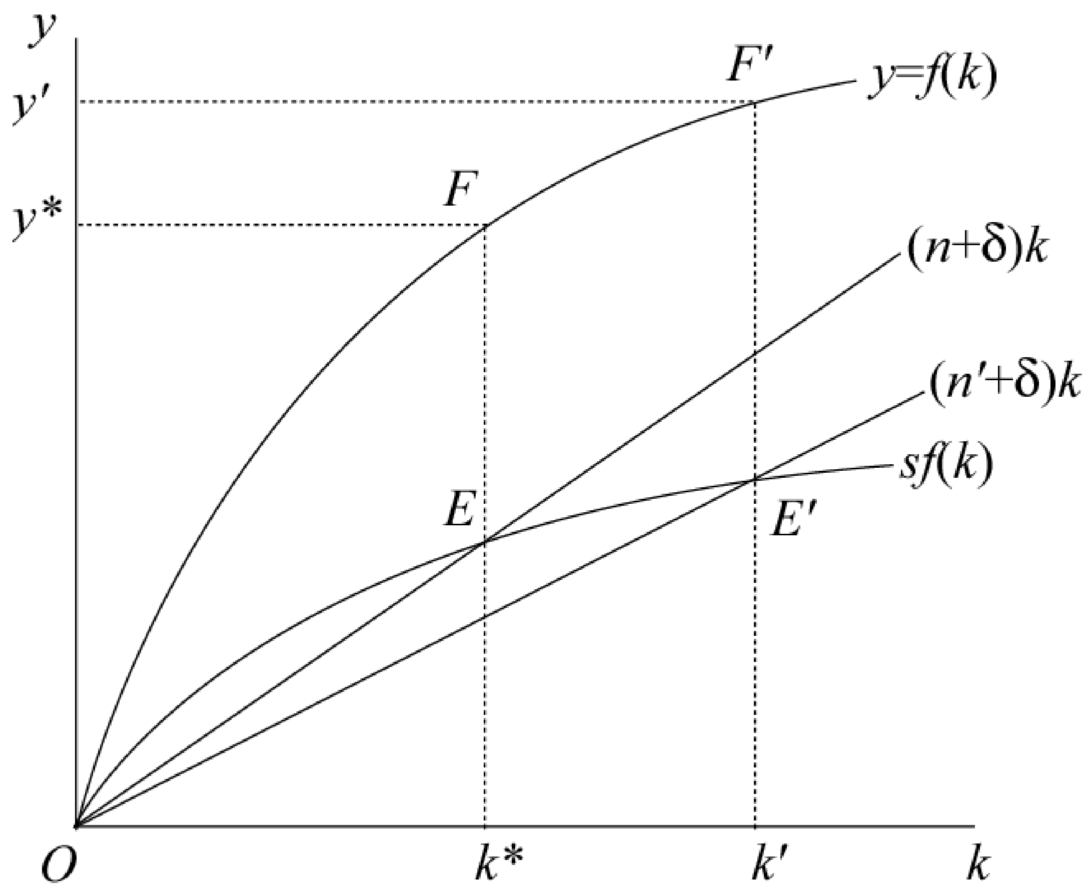


貯蓄率の上昇



貯蓄率の上昇
→長期的に*k*および*y*の増加

人口成長率の低下



人口成長率nの低下
→長期的にkおよびyの増加

nの低下→kを一定に保つための投資が少なくてすむため，資本蓄積が進む

数値例

$y = f(k) = k^{\alpha}$の場合

定常状態の条件

$$sk^{\alpha} = (n + \delta)k$$

この方程式を解くと

$$k^* = \left(\frac{s}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

次のことがわかる

- sが高いほどk*は大きい
- nが低いほどk*は大きい

Solowモデルのインプリケーション

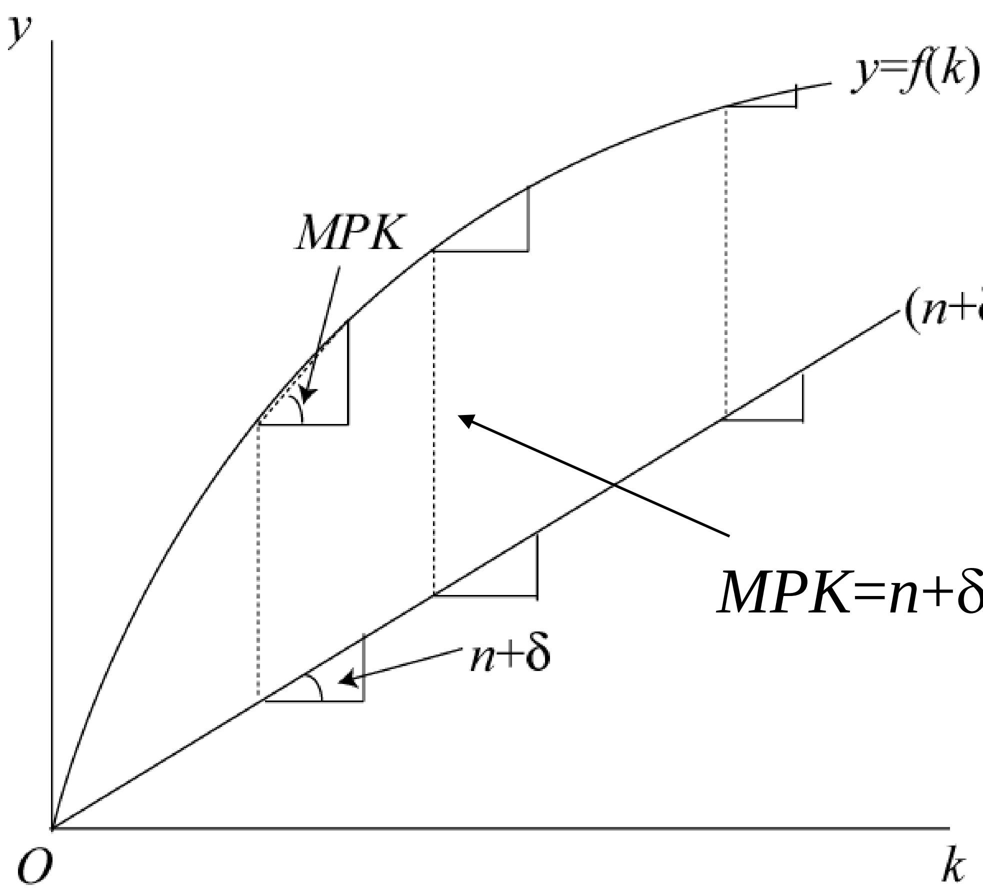
- 貯蓄率の上昇
  - 定常状態に到達するまでの間,経済成長が高まる
  - 定常状態のkを増加
  - 労働者一人当たり産出量yを増加させる
  - 貯蓄率が高ければ高いほど良いのだろうか？
- 人口成長率の低下
  - kを維持するための必要貯蓄量を減少させる効果を通じて，資本労働比率は上昇
  - 労働者一人当たり産出量は増加!

黄金律(Golden Rule)の条件

- 定常状態において，労働者1人当たり消費を最大にするようなkの水準
- 定常状態における労働者1人あたり消費
- $c = f(k) - sf(k) = f(k) - (n+\delta)k$
  - 定常状態において　$sf(k) = (n+\delta)k$　が成立
- $f(k)$と$(n+\delta)k$の距離を最大にするようなkの水準を求めればよい。
- そして，そのようなkを実現するような貯蓄率が望ましい貯蓄率

黄金律の条件：$MPK=n+\delta$

$$c = f(k) - sf(k) = f(k) - (n+\delta)k$$



$MPK=n+\delta$の時，この距離が最大

MPKと$n+\delta$

- $MPK=n+\delta$
  - 黄金律
  - 定常状態における労働者一人当たり消費水準が最大
- $MPK>n+\delta$
  - 資本不足
  - 貯蓄率を高めることが望ましい
  - 通常の状態
- $MPK<n+\delta$
  - 資本過剰
  - 貯蓄率を低めることが望ましい；ある時点において消費を拡大して，次の期以降の消費を高める余地がある
  - 財政赤字で国民貯蓄を低下させることは望ましい
  - 動学的非効率性

動学的非効率性

- 動学的効率性を満たしている経済
  - ある時点の消費を増加させるとその時点以降の消費が必ず犠牲になる（パレート改善の余地は無い）
  - 経済成長率＜利子率
  - 定常状態の消費を高めるためには,
    - 貯蓄率を高める政策が望ましい
    - 財政赤字の解消
    - 年金制度改革　賦課方式から積立方式へ
- 動学的非効率性の状況にある経済
  - ある時点の消費を増加させても，その時点以降の消費が犠牲にならない
  - 貯蓄率を低下させる政策が望ましい
- 主要国経済は動学的効率性を満たしている

動学的非効率性の条件

時点tの消費を拡大し，その後の時点の消費を不変に保つような政策を考える。これが可能ならパレート改善の余地があり，動学的に非効率な状況にある。

$$k_{t+1} = \frac{1}{1+n}\left[k_t(1-\delta) + f(k_t) - c_t\right] \qquad (*)$$

(*) : c_tの増加→k_{t+1}の減少がわかる。その後のkの推移は次の通り

$$dk_{t+2} = \frac{1-\delta+f'(k_{t+1})}{1+n} dk_{t+1}$$

$$dk_{t+3} = \frac{1-\delta+f'(k_{t+1})}{1+n} dk_{t+2} = \prod_{i=1}^{2}\left[\frac{1-\delta+f'(k_{t+i})}{1+n}\right] dk_{t+1}$$

動学的非効率性の条件 (2)

前ページの結果から，T期先のkは

$$dk_{t+T} = \prod_{i=1}^{T-1}\left[\frac{1-\delta+f'(k_{t+i})}{1+n}\right]dk_{t+1}$$

$dk_{t+1}<0$であったので，将来の資本は減少する。将来において資本が 0 になって一定の消費が維持できない事態に至らないためには次の条件が成り立つことが必要

$$\lim_{T\to\infty} d\,k_{t+T} = 0 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-\delta+f'(k_{t+i})}{1+n} = 0$$

- 長期的に（平均的に）$f'(k)-\delta<n$（$MPK<n+\delta$）が成り立つことが動学的非効率性の条件である。
- 長期的に（平均的に）$MPK>n+\delta$が成立する→資本の減少が限りなく大きくなり，cを不変に保てない

Solowモデルの留意点

- 貯蓄率が外生的
  - 利子率の変化の効果
  - 将来の所得に対する予想
  - 税制の効果
  - マクロ政策の効果
  - 人口構成の変化の効果
- 代替的なモデル
  - 世代重複モデル（OLGモデル）
    - ライフサイクル・モデル　　人口構成の変化
    - 解析的に解くのが難しい（せいぜい2期間モデル）
  - Ramseyモデル
    - 代表的個人が将来を予想して最適化行動